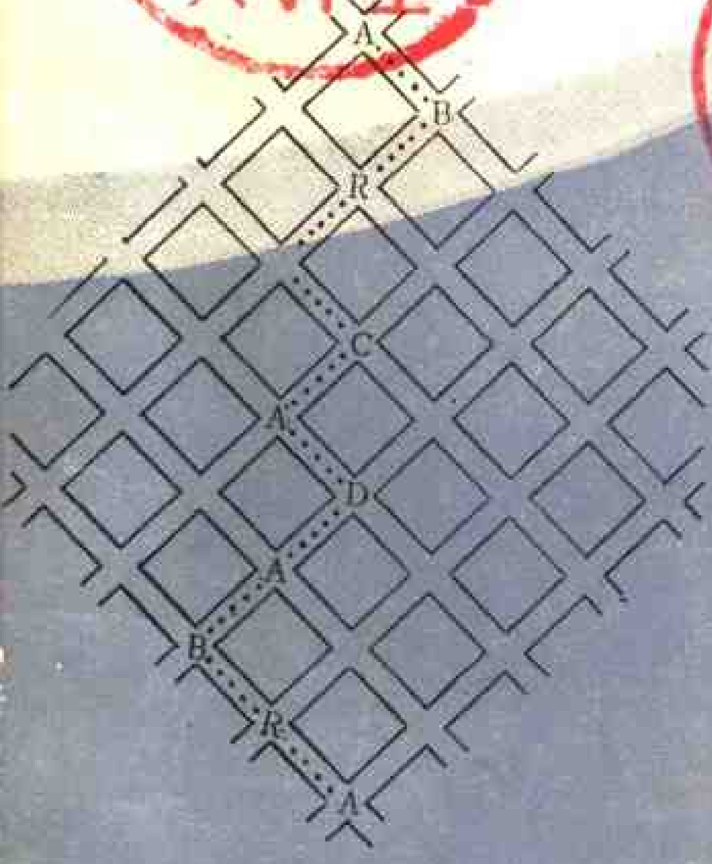
MATHEMATICAL DISCOVERY

数学的发现

第一卷

[美] 乔治·波利亚著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译



内蒙古人民出版社

数学的发现

——对解题的理解、研究和讲授

第一卷

（美）乔治·波利亚著

刘景麟　曹之江　邹清莲译

内蒙古人民出版社

一九八〇·呼和浩特

Mathematical Discovery

G · Polya

Vol. I

John Wiley & Sons, Inc. 1962

数 学 的 发 现

第一卷

（美）乔治·波利亚 著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译

*

内蒙古人民出版社出版

内蒙古新华书店发行 内蒙古新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：10.25字数：215 千

1979年11月第一版 1980年9月第1次印刷

印数：1—42,300册

统一书号：7089·115 每册：0.94元

译 者 的 话

乔治·波利亚是一位杰出的数学家。他1888年出生于匈牙利，青年时期于布达佩斯、维也纳、格廷根、巴黎等地攻读数学、物理、哲学，1912年于布达佩斯大学获哲学博士学位，1914年进入苏黎世著名的瑞士联邦理工学院任教。1940年他移居美国，自1942年起一直为美国斯坦福大学教授。

波利亚在数学的广阔领域里有极为精深的研究，发表过二百多篇研究论文和许多专著。他不仅是一位数学家，而且也是一位优秀的教育家。他热心教育，十分重视从小培养学生的解题能力。在他的经历中，始终把高深的数学研究与数学的普及教育结合在一起，不倦地为改进数学教学而努力。在这一方面，他写过的文章和著作也很多，其中最著名的是，《怎样解题？》、《数学与推理》（Ⅰ、Ⅱ卷）、《数学的发现》（一、二卷）。上述著作出版后受到广泛的欢迎和推崇，在美国曾风靡一时，尔后又被翻译成世界上多种文字，被评价为二次大战后出现的经典性著作。

我们在这里向读者介绍的，是《数学的发现》一卷。

也许人们会想，这大概是一本介绍许多新奇而有趣的数学知识的书。诚然，它包含有不少有趣的数学内容，但是，从整个来讲，正如本书副标题所示，它主要不是一本传授知识的书，而是一本讲解方法的书。

任何学问都包括知识的积累和能力的训练两个方面。按

作者的看法，在数学上，能力的训练比起单纯的知识的堆积，要重要得多。传授现成的知识，也许要容易些，但是要在大量种类繁多的数学问题中，找出它们共同的特征，提炼出一种思考所遵循的途径和方法，则要艰巨得多。本书的目的，就是试图教会读者如何去思考和剖析问题，激发起读者内在的能动性和创造精神，学会数学的思维方法，从根本上来提高你的数学素养。

作者把解题看作是人类的最富有特征性的活动。而这种活动——如同游泳或弹钢琴，也是一种本领。学习这种本领，同学习任何其它本领一样，其必由之路乃是模仿和实践。学习，首先就是模仿，而模仿则必须要有榜样。模仿是为了实践，而实践又必须具备机会。本书的全部内容，概括地说，就是为读者学习数学的方法提供模仿的榜样和实践的机会。

在本书的各章中，作者通过对各种类型生动而有趣的典型问题（有些是非数学的）进行细致剖析，提出它们的本质特征，从而总结出各种数学模型。作者以平易浅显的语言，应用启发式的叙述方法，讲述了有高度数学概括性的原理，使得各种水平的读者，都获益弗浅。这种以简驭繁，寓华于朴，平易而生动的讲授，充分反映了一位教育大师的风格特征。

本书各章末尾的习题与评注，是正文的延续，它们都是经过作者的精心选择安排、与正文紧密关联的不可分割的部分。这些练习，为读者提供了一个进行创造性工作的极好机会，它将激起你的好胜心和主动精神，并使你品尝到数学工作的乐趣。这种机会，对于一个立志要学好数学的读者，或

者想切实提高自己数学教学水平的教师来讲，是十分可贵和难得的。这部分习题和评注，不应看成是正文的附庸，相反地，从某种意义上讲，它也许是本书中更为重要的部分。任何读者，只有实践了这一部分内容之后，才能真正领略到本书的价值。

对于浅尝辄止、不图深入的人来说，本书的有些部分也许会使他感到“容易”，而有的题目，他又会认为太“艰深”了。对于勤于思考的读者来讲，可能就不是这种看法。这也许是一本易读的书，也许不是一本易读的书，这个问题让我们留给读者自己去品味吧。

由于波利亚的著作译成中文的尚为数不多，因此我国广大读者对他可能还不很熟悉。今天我们有幸能将这位国际上享有盛誉的数学家及他的著作《数学的发现》（一卷）介绍给读者，自然感到十分高兴。波利亚写本书的一个直接动机，就是为了改善当时美国的中学数学教师的培训，从而提高中学的数学教学水平。而这个问题（中学数学教师水平低和教学质量差）对于我们来讲，也同样存在，而且在有些地区还较严重。因此本书的出版，若能多少有助于改善中学数学教学的现状，也就遂了我们翻译此书的初衷了。

由于我们水平有限，又没有初等数学的教学经验，因此译文中错误或不妥之处，在所难免，诚恳希望读者给予批评指正。

译　者

1979年国庆前夕于内蒙古大学

目　　录

第二部分　通向一般方法

序

一个解法称为是完善的，如果我们从一开头就能预见甚至证明，沿着这个方法作下去，就一定能达到我们的目的。

莱卜尼兹《文集》，p.161

1. 解一个问题就是意味着从困难中去找出一条越过障碍的路，使我们能够达到一个不易即时达到的目标。解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋：因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。本书的目的就是去了解这一活动，提供方法去讲述它，从而最终使得读者提高解题的能力。

2. 本书包括两个部分：让我简要地谈一下这两部分的主题。

解题是一种本领，就象游泳、滑雪、弹钢琴一样：你只能够靠模仿和实践才能学到它。本书不能给你提供一把可以打开一切门户、解决所有问题的魔钥匙，但是它却给你提出了许多可供模仿的例子和供你实际练习的机会。如果你想学会游泳，你必须得跳进水里去，同样的，如果你想成为一个善于解题的人，你就必须得去实地解题。

假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的

问题时，能起到指引的作用。一种解题的方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那末它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型。本书第一部分的目的，就是使你熟悉为数不多的几个有用的模型。

仿照某个问题的解法，去解一个十分类似的问题，当然是件容易的事。但是假若问题并不十分类似，那末这个模仿就会变得很困难甚至于不可能了。人们常常有一个根深蒂固的念头：希望能找到一种威力无边的方法，它能够去解出所有的问题。这个念头在我们许多人的心目中，也许是不明确的，但是在一些神话故事或一些哲学家的著作里，它却是表露得十分明白的。你也许还记得能打开一切门户的魔咒的故事吧。笛卡儿曾冥思苦想过一种解一切问题的万能方法，还有莱卜尼兹，也曾明白地叙述过他的完善的方法的思想。然而这个万能的完善的方法的探求，比起那个能点石成金的点金石的探求来，并没有取得更多一点的成绩。伟大的梦毕竟还是梦。但是从另一个方面来说，这些不能到达的理想仍然可以影响、指引着人们：没有人能到达北斗星，但是人们望着它却找到了正确的方向。本书当然不可能向你提供（也永远不可能有什么书能向你提供）一个万能的完善的解题方法，但是它（第二部分）却向你概略地讲述了迈向这个不可达到的理想的一些步伐，这些步伐即使是微小的几步，也足以使你大开心窍并且提高你解题的能力。

3. 我想把本书试图进行的研究（即解题的手段与方法的研究）说成是“启发式”的。启发式一词，过去曾被术

士们用过，现在一则是被遗忘了，一则也是名声不好。但是我并不忌讳它。

在大多数的场合，本书实际上都是在进行通达的启发式的讲解：我总是用各种办法去启导读者做题并且让他思索出用来解题的手段和方法。

下面各章的大部分内容，将对为数不多的若干例题进行充分的示范讲解。对于一个不惯说教的数学家来说，这样的写法也许是过于冗繁了。然而实际上，我们所讲述的，不仅仅限于解法，而且还讲述了解法的“病历”。所谓“病历”，就是这个解法所藉以发现的一些实质性步骤，以及导致这些步骤的动机和想法的一种叙述。对于一个特例所以要进行这样周密的描述，其目的就是为了从中提出一般的方法或模型，这种模型，在以后类似的情况下，对于读者求解问题，可以起指引的作用。这样一种从具体实例中抽出来的方法或模型的明确表述，我常常把它放在单独的一节里，虽然它的第一次猜测性的叙述也许在讲述“病历”的枝节片断中已经出现过了。

在每一章的后面都附有习题和评注。读者在作这些习题的时候，就可以得到一个去应用、澄清并扩大本章课文中所讲述的内容的好机会。评注分散在习题的中间，它常常是谈一些问题的推广、进一步的技巧，以及一些枝节上的说明。

我不能肯定这样写会收到多大的效果，但我当尽力而为，以取得读者的合作。我尝试着将我在课堂教学里行之有效的讲授风格移注到本书的扉页中去。由于讲述了解法的“病历”，我想读者可以藉以熟悉一下研究的气氛。通过习题的选择、叙述与安排（叙述和安排是更为重要的，它们花去了

比我预先想象的要多得多的时间），我试图向读者提出挑战（你有没有勇气去解出它们），激起他们的好胜心和主动精神，并给他提供充分的机会去面对多种多样的研究场合。

4．本书大部分篇幅是处理纯数学问题，非数学的问题提得很少，它们常常出现在问题的背景里，实际上，我还是对它们进行了仔细的考虑，只要可能，我总是把数学问题讲到那种程度，使得读者在弄清楚数学问题的同时，也弄明白了非数学的问题。

本书大部分篇幅是讨论初等数学问题，高等数学问题虽然很少提到，但实际上它却是我去收集素材的指引。本书的材料主要源自我自己的研究工作，我在许多初等数学问题上的处理方法，反映了我在处理高等数学问题（它们不可能列入本书）上得到的经验。

5．本书除了理论上的目的——启发式的研究之外，尚有一个具体的、紧迫的实际目的，即改进中学数学教师的培训。

由于最近几年我都在给中学数学教师们讲课，这就使得我有很好的机会去观察他们的培训工作，并形成了自己的看法。我想我是一个比较客观的观察者，作为这样一个观察者，我只有一个意见：*中学数学教师的培训情况是很不佳的*。而对这一点所有主管单位都不能推卸责任。尤其是教育他们的学校和学院里的数学系，假若他们想改变现状的话，就应该认真地修改一下他们的教育内容。

*学院应当给未来的中学教师提供些什么课程呢？*我们无法恰当地来回答这个问题，除非我们先回答另一个与此相关的问题：*中学应当给他们的学生教些什么？*

但是这个问题是不会有什么结果的，因为对它的争议太大了，似乎不可能取得一致的回答。这是不幸的。但尽管如此，我想在问题的有一个方面，专家们还是可以取得一致意见的。

任何学问都包括知识和能力这两个方面。假如你真正具有数学工作（无论是初等的或是高等水平的）的经验的话，那末你会毫不迟疑地说，在数学里，能力比起单单具有一些知识来，要重要得多。因此在中学里，如同其它各级学校一样，我们应当在授予学生一定数量知识的同时，还应教会他们一定的解决问题的能力。

在数学里，能力指的是什么？这就是解决问题的才智——我们这里所指的问题，不仅仅是寻常的，它们还要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造精神。因此中学数学教学首要的任务就是加强解题的训练。这是我的见解，当然你也许不全与我一致，但我想你至少会同意解题训练应当受到重视这一点——这也就行了。

教师应当了解他该拿什么去教学生，他应该教给学生如何去解题——但倘若他自己也并不了解，那末他如何去教他们呢？教师应当发扬他的学生的才智和推理的能力；他应当发觉并鼓励学生的创造性——但是现在问题就在于他自己所修的课程并没有充分考虑他能否熟练掌握所学的东西，更不用说去提高他的才智、他的推理能力、解题能力和创造精神了。这一点，据我看来是当前数学教师培训中最大的缺陷。

为弥补这一缺陷，教师的课程里应当列入有适当水平的创造性工作。我试图通过指导一个解题的讲习班来为这类工作提供机会，本书就包含有我为我的讲习班所收集的材料以

及应用它的指南，见“给教师及教师的教师的指示”（本卷末 pp.310—314）。我希望这将有助于数学教师的培养，无论如何，这是本书的实际目的。

我相信对所提到的这两个目的——理论方面的和实际方面的——经常的关心将使我写好这本书。我也相信在将要阅读本书的各种各样读者的各种不同的兴趣之间，不会存在冲突（有的对一般的解题、有的对提高自己的能力、还有的则对提高他们学生的能力感兴趣），对于某一类读者关心的东西，对于另一类读者来讲可能也是很重要的。

6. 本书是早些时候我写过的另两本书的继续，即《怎样解题?》和《数学与推理》，后者又分为两卷，各有单独的书名，第一卷是《数学里的归纳和相似》，第二卷是《合理推断的模型》，这几本书的内容互相补充但没有实质性的重复。在一本书里讨论过的题目，也许在另一本书里会重新出现，但用的是另外的例子，另一种叙述，并且从不同的角度去处理。因此这几本书先读那一本后读那一本都可以。

为了便利读者，我们将把这三本书加以比较并把对应的章节列在本书第二卷末尾的索引里。

7. 在书的第二部分尚未完成的时候就将第一部分发表也许是冒风险的（有一句德国谚语：“不要把盖了一半的房子让傻子看见”），这个风险并不是不足道的，但是出于对本书前面提到的实际目的的考虑，我决定不再耽搁本卷的出版。

第一卷包括本书的第一部分（模型）和第二部分（通向一般方法）的两章。

第一部分四章所收集的问题要比后面各章广泛得多。实

际上，第一部分在很多方面同作者与采果（G.Szegö）合作的《分析中的习题与定理》（见文献目录）是类似的。但也有明显的差别：本卷提出的问题大多是比较初等的，并且对问题也不仅仅限于提示，而作了许多明确的陈述与讨论。

第二部分的第三章是受了哈尔特柯夫（W.Hartkopf）最近著作（见文献目录）的影响，我把他的最动人的一些部分加上适当的例子和附注介绍在这里，这部分内容十分符合我的启发式的想法。

8. （从略）

乔治·波利亚

瑞士苏黎世

1961年12月

对读者的提示

第2章第5节在引述时简记为§2.5，第2章第5节第3小节则简写为§2.5（3），第三章的习题61简写为习题3.61。

HSI和MPR是作者写的两本书《How to Solve It》（怎样解题）和《Mathematics and Plausible Reasoning》（数学与推理）的缩写，它们在本书中经常被引用。

*，符号*是一些习题、评注、节和更短的段落的前缀，在这些习题、评注、节和段里要求的知识超过了初等数学范围（见下段）。然而对于非常短的这类段落就不用这个前缀。

本书的大部分内容仅要求初等数学知识，也就是说，象平常程度较好的中学里所教的几何、代数、坐标作图及（有时候）三角等那些内容。

本书中所列习题很少需要用到初等数学以外的知识，但是从难度上来讲，则往往略高于中学的水平。对于一部分习题，解答是完全给出的（虽然叙述得很简要），对另外一些习题，则仅仅给出解答的几步，有时候只是一个结果。

对有些习题的提示（它可以使解法简化）用括弧列在习题的后面。一个习题附近的题常常也可以作为它的提示。在有的章里特别要注意写在习题（或一组习题）前面的几行引言。

读者若在解一个题时花了很多精力，那他肯定会从中得到不少收获，即使他并没有把题解出来。当花了精力仍然没

有解出题时，这时他可以看一下解答（一部分），从中找到有用的东西，然后把书放在一边，自己再去作出解答的其余部分。

当读者在已经解完了一个题，或者是看完它的解答，或者是读完解的“病历”的时候，能够去细细揣摩一下解的方法，那是最好不过的了。读者当他作完了题而记忆犹新的时候，若能够回过头去重温一下他所作的一切，便可以看到他刚才越过的困难的实质。他可以问自己许多有用的问题：“什么是决定性的一步？什么是主要困难？什么地方我还可以改进？我没有能看到这一点：那末需要哪一条知识和什么样的思路才能看得到呢？有什么招数值得学一学？有什么东西在以后的类似情况下仍能用到？”所有这些问题都是很好的，还可以有其他的问题——但是最好的还是从你自己脑子里发出来的问题。

第一部分　数学模型

我所解决的每一个问题都将成为一个范例，以用于解其它问题。

《笛卡儿全集》，第六卷，
pp.20—21，方法论，

如果我在科学上发现了什么新的真理，我总可以说它们是建立在五、六个已成功解决的问题上；它们也可以看成是五、六次战役的结果，在每次战役中，命运之神总是跟我在一起。

同上，p.67。

第一章 双轨迹的模型

§1.1 几何作图

用直尺圆规作图是平面几何教学里的一项传统内容。其中一些最简单的作图法是制图员常用的，但除此而外，几何作图就没有更多的实用价值，它在理论上的重要性也不太大。然而，这种作图法在课程里还是应该有恰当的位置。因为它最适合于初学者去熟悉几何图形，它也特别适宜于使初学者摸到解题的思路。我们之所以要来讨论几何作图问题，正是基于这个原因。

象数学教学里很多其他的传统内容一样，几何作图也可远溯到欧几里得（Euclid）。在欧几里得的体系里，几何作图有着重要的地位。欧几里得"原本"的头一个问题（第一卷，命题1）就是"用一条给定的有限长直线作一个等边三角形。"这里把作图局限于等边三角形，在欧几里得原本里有它自己的理由。可是实际上，若把问题提得更为一般：给定三边求作一三角形，其解法也是同样的容易。

让我们用一点时间来分析一下这个问题。

在任何问题里都必定有未知量。因为如果一切都已经知道了，那就没有什么需要找的，也就什么都不用作了。在我们这个问题里，未知量（希望获得的、或所要求的东西）是一个几何图形，即一个三角形。

同样地，在任何问题里也总有某些东西是已知的或给定的（我们称这些给定的东西为已知量或数据），因为如果什

么也没有给，我们就没有藉以去认识那些所要的东西的依据；这时即便我们看见了它，也会辨认不出来。在我们现在这个问题里，已知量是三条“有限直线”，或线段。

最后，在任何问题里还必须有一些把未知量与已知量联系起来的条件。在我们现在这个问题里，条件就是：所求的三角形的边必须是所给的三条线段。

条件乃是问题的核心部分。我们不妨把现在的问题跟下面这个问题比较一下：“给定三条高线求作一三角形。”在这两个问题中，已知量是一样的（三个线段），未知量也是同一类型的几何图形（三角形），可是未知量和已知量之间的联系，即条件是不同的，因此问题就变得十分不同（我们的问题比较容易些）。

当然，读者必定是熟悉这个问题的解法的。令 a、b 和 c 是所给三条线段的长度，我们画上线段 a，它的端点是 B 和 C，再画两个圆，一个圆心在 C，半径为 b，另一个圆心在 B，半径为 c，设 A 是它们的两个交点中的一个，则 ABC 就是所求的三角形。

§1.2 从例子到数学模型

让我们回过头来看看前面问题的解法，考虑能否从中发现一些我们所希望的、具有特征性的东西，以便在其他场合用于解类似的问题。

在画出线段 a 以后，我们就已经定下了所求三角形的两个顶点 B 和 C；剩下只需要再确定一个顶点就行了。实际上，在作出线段 a 以后，我们就把所提的问题转化成了另一个问题，它跟原问题不同，但却是等价的。在这个新问题里：

未知量是一个点（即所求三角形的第三个顶点）；

已知量是两个点（B与C）与两个长度（b与c）；

条件是：所求的点到定点C的距离是b，而到定点B的距离是c。

这些条件包含着两个部分：一部分是关于b与C的，另一部分则是关于c与B的。我们若先只看条件的一部分，而把另一部分放在一边，那么，未知量在多大程度上决定了？它会怎么变呢？在平面上，到一个定点C的距离是定值b的点，既不能被完全确定也不是完全自由的，它必定限制在一个"轨迹"上，即必在以C为圆心b为半径的圆周上。因此，在本问题里，未知的点必须同时在两个这样的轨迹上，它当然就是它们的交点。

这样我们便发现了一个解题的模型，——"双轨迹的模型"，仿照它，我们就可以在若干场合下成功地解决几何作图问题。今将它叙述如下：

首先，把问题归结为要确定一个点。

然后，把条件分成两部分，使得对每一部分，未知点都形成一个轨迹；而每一个轨迹必须是一条直线或是一个圆。

例子比起干巴巴的说教总要来得好些——光是讲讲模型也许不会给你带来多少好处。每一个因应用了它而得到成功地解决的例子，都将使这个模型生色，并变得越来越有趣，越来越有价值。

§1.3 例

在中学课程里传统的作图法几乎全部是双轨迹模型的直接应用。

(1) 作已知三角形的外接圆。我们把这个问题归结为

求圆心。在这个问题里

未知量是一个点，记为X；

已知量是三个点A，B和C；

条件是三个距离相等：

$$XA=XB=XC$$

我们把条件分成两部分：

第一部分　$XA=XB$

第二部分　$XA=XC$

每一部分条件都对应一条轨迹。第一条轨迹是线段AB的垂直平分线，第二条轨迹是AC的垂直平分线。所求的点X就是这两条直线的交点。

我们可以对条件采取另一种分法：第一部分，$XA=XB$，第二部分，$XB=XC$，这就产生了另一种作图法。那么，结果会不一样吗？为什么不能呢？

（2）作已知三角形的内切圆。把问题归结为去求圆心。在这个问题里

未知量是一个点，记为X；

已知量是三条直线a，b和c；

条件是点X到三条给定直线的（垂直）距离相等。

我们把条件分成两部分：

第一部分，X到a和b的距离相等。

第二部分，X到a和c的距离相等。

满足第一部分条件的点的轨迹由两条互相垂直的直线组成：即a和b所夹的角的角平分线。第二部分的轨迹与此类似。这两条轨迹有四个交点：除了三角形内切圆的圆心外，我们还得到了三个旁切圆的圆心。

请注意，在这个应用里，要求对§1.2末尾模型的陈述作微小的修改。应改动些什么呢？

（3）给定两条平行线及其间一点，试作一圆与给定的两直线相切并通过已知点。把所求的图形在纸上画出来，就会发现我们可以很容易地先解决一部分问题：给定的两平行线间的距离显然就是所求圆的直径，而它的一半就是半径。

我们把问题归结为求未知圆的圆心X。

知道了半径为r，我们就可把条件分开如下：

第一部分，X与给定点的距离是r。

第二部分，X到两给定直线的距离都是r。

第一部分条件决定一个圆，第二部分条件决定一条位于两平行线的当中且平行于它们的直线。

如果不知道所求圆的半径，我们可以把条件这样去分：

第一部分，X距给定点和给定的第一条直线距离相等。

第二部分，X距给定点和给定的第二条直线距离相等。

把条件分为这样两部分，从逻辑上说是无可非议的，然而却毫无用处，因为这里得到的轨迹是抛物线；这是我们用直尺和圆规所作不出来的。请注意，我们设计的解题方案基本要点就是：所得到的轨迹必须是圆弧或直线。

这个例子可以使我们更好地去理解双轨迹的模型。这个模型在许多场合都是有用的，但正象有些例子所表明的那样，它也有它的局限性。

§1.4 设想问题已经解出来了

所谓打如意算盘*），就是去想象一些你现在还没有得到

*） 原文为：wishful thinking——。凡文中加星号的注释，均为译者注释。

的好东西。譬如一个饿汉，除了一小片干面包以外什么也没有，在自言自语："要是有点火腿就好了，如果还有几个鸡蛋，我就可以做火腿煎蛋了。"

人们常常会告诉你，打如意算盘是不好的。但是我劝你不要相信，因为这恰恰是一个错误的成见。如意算盘是可以打得不好的。比如在菜汤里放了过多的盐，是不好的，或者在巧克力布丁里那怕是放一点点大蒜也是不好的。我的意思是说，如意算盘打得太多了或是打错了地方，那会是很糟糕的。但如意算盘本身却并不是坏的，在生活中，在解题时，打点如意算盘有时是会带来很大的帮助。譬如那个可怜的饿汉，脑子里打着点火腿煎鸡蛋的如意算盘的话，那他吃起干面包来就觉得有味得多，也消化得好些。现在我们来考虑下面这个问题（见图1.1）。

给定A，B和C三点，作一直线交AC于X，交BC于Y，使得

$$AX=XY=YB$$

我们想象已经知道了两个点X和Y中某一个的位置（这是一个如意算盘）。那么我们就能很容易地找出另外那个点（通过作一条垂直平分线）。困难在于我们连一个点的位置都不知道，这个问题看来并不容易。

让我们把如意算盘打得大一点，设想问题已经解出来了。也就是说，假定图1.1是按照我们问题所给的条件作出来的，那么，折线$AXYB$中的三个线段就恰好相等。这样做也就是我们想象一件还没有到手的好事情：我们想象所求直线XY的位置已经找到了，即想象已经找到了问题的解。

有张图1.1摆在面前总是好事。那些我们应该考虑的几

何元素——已经有的和要去找的，即已知量和未知量，它们被条件联系在一起——都在图上显示出来了。利用面前这张图，我们可以思索哪些有用的元素可以由已知量作出来，哪些元素对于作出未知量是有用的。我们可以从已知量出发朝前推，也可以从未知量出发倒推回去，那怕是走点弯路也是不无教益的。

你总能用七巧板*) 拼几样图形吧？你能解出这个问题的某些部分吗？图1.1里有一个三角形$\triangle XCY$，你能把它作出来吗？我们得有三个已知量才行，可惜，我们只有一个——角C。

你只能利用你已有的东西，你不能用你还没有的东西。那么，你能不能从已知的东西里导出某些有用的东西呢？当然罗，把定点A和B联起来是再容易不过了，而联线也许是有用的，让我们画上它（图1.2）。然而要想看出AB怎样才能用上可不那么容易，要嘛先把它搁在一边吧！

图1.1里看上去是那么空荡，这自然使我们发出疑问：是不是在作图时还需要些别的线，是些什么线呢？

线段AX，XY和YB是相等的（我们认为它们是相等的——如意算盘！）相等的线段本来是可以用来构成很多美妙的图形的，然而它们现在却是处在这样别扭的相对位置上。也许我们应该再加上一些相等的线段，先加上一条吧！

机运和灵感会提醒我们在图形里引进这样一条线：作YZ平行且等于XA，见图1.3（我们现在是从未知量——如意算盘出发，试图倒推回去，得到已知量）。

---

*) 原文为jigsaw puzzle。

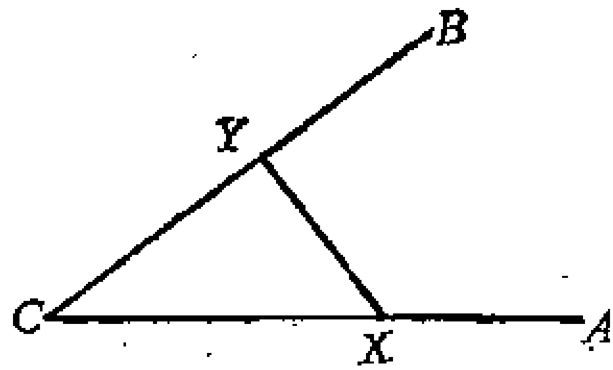


图1·1　未知量，已知量，条件

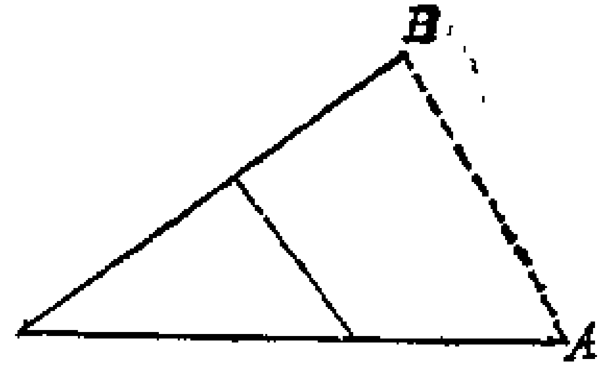


图1·2　向前推（从已知量出发）

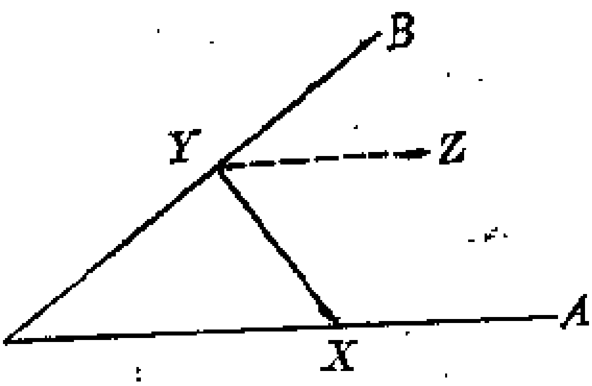


图1·3　向后推（从未知量出发）

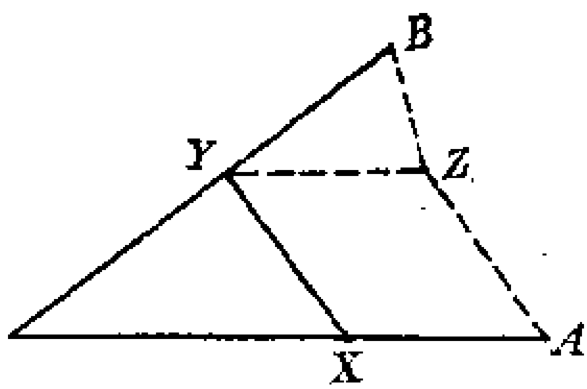


图1·4　和以前的知识联系起来

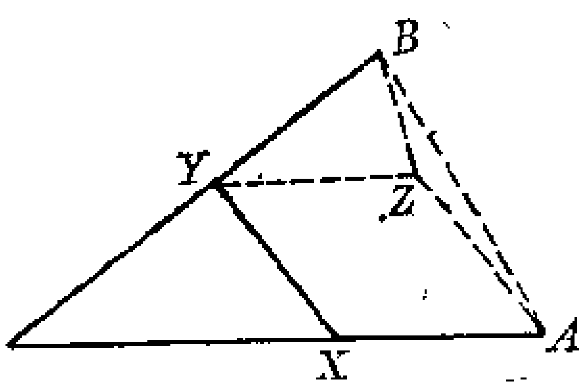


图1·5　叠合

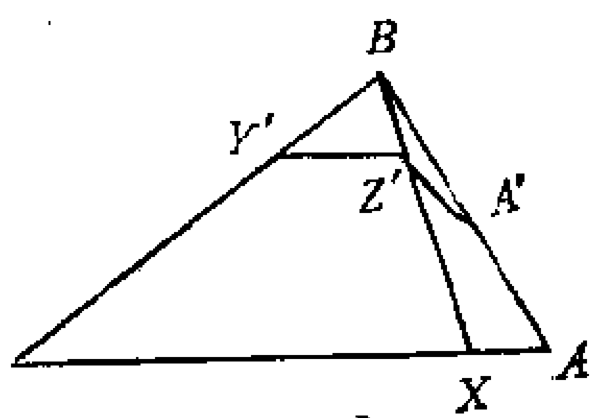


图1·6　跳板

引进线段YZ只是一个尝试，不过看来这条线不错，因为它带来了一些熟悉的图象。连接ZA和ZB（见图1.4）。我们得到了菱形$XAZY$和等腰三角形BYZ。你能解出问题的某些部分吗？你能作出$\triangle BYZ$吗？作等腰三角形得要两个已知量，但是不幸，我们只有一个已知量（$\angle BYZ=\angle C$）。不过从这里我们还是可以得到点东西：即使我们不完全晓得$\triangle BYZ$，我们却晓得它的形状；虽然我们不知道它的尺寸大小，我们却可以作出一个与它相似的三角形。

这一下我们到了离解答近一点的地方了，但我们还没有得到解答，我们还必须试着多做点事才行。迟早我们会想起前面的尝试——图1.2。怎样把前后这两者联系起来呢？把图1.2和1.4叠在一起我们便得到了图1.5，这里面出现了一个新的三角形BZA。我们能作出它吗？假如我们知道了$\triangle BYZ$，就可以作出它来，因为在这种幸运的情况下，我们能收集到三个已知量：两条边，ZB和$ZA=ZY$，和B点的角。可是，我们并不能如愿，不管怎么说，我们不能完全知道$\triangle BZA$，我们只知道它的形状。那么，下面我们怎么办呢？

我们作相似于四边形$BYZA$（图1.5）的四边形$BY'Z'A'$（见图1.6）。它在所求的图形里是一个紧要的部分，因为它可以作为一块达到彼岸的跳板*）！

§1.5 相似形的模型

我们现在按照图1.1——1.6的启示来作这个图形。

*）原文为Stepping Stone按照前后文意，我们认为译作“跳板”更为切合原意。

在给定的直线BC上（见图1.6），任意选一点Y'（但不要离B太远）。作直线$Y'Z'$平行于CA，使得

$$Y'Z'=Y'B$$

然后，在AB上决定一个点A'，使得

$$A'Z'=Y'Z'$$

过A作平行于$A'Z'$的直线，并找出它与BZ'的延长线的交点：这个交点就是所要求的点Z。剩下的部分就容易了。

四边形$AZYB$和$A'Z'Y'B$不仅仅是相似的，而且还是"同位相似"（homothetic）的，B点是它们的相似中心。这就是说，两个相似图形的对应点的任何联线必通过B点。

这里我们附带提一句：在两个相似图形中，首先引起我们注意的那一个，$AZYB$，实际上却是后作出来的[1]。从这里我们可以对于求解问题体会到一些东西。

上述例子给出了一个一般的模型：*如果你不能够作出要求的图形，就考虑作出与它相似的图形的可能性。*

本章末尾有些例子，如果你从头到尾把它们做出来，你就能够体会到"相似图形"模型的用处。

§1.6 例

下面这些例子（从某些方面讲）是各不相同的；但它们的差异可以更清楚地揭示出我们希望剖析的那些共同特征。

（1）*作两圆的公共切线。*设两圆的位置给定（画在纸

1）在我们刚完成的这个"病历"中（从§1.4开始），最值得注意的一步就是"设想问题已经解出来了"。这方面进一步的说明参见HSI，图2，pp.104—105，和Pappus，pp.141—148，特别是pp.146—147。

上），我们希望作直线同时切于两圆。如果给定的两圆不重叠，那么它们有四条公切线：两条外公切线和两条内公切线。让我们限于考虑外公切线（见图1.7），除非两圆中的一个完全包含在另一个的内部，外公切线总是存在的。

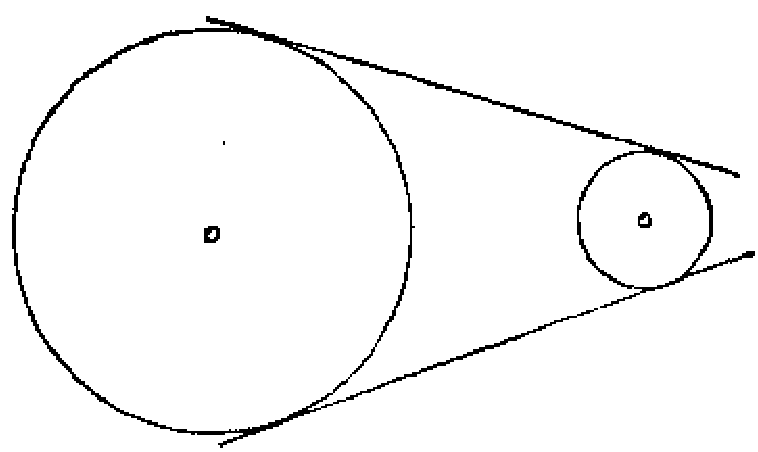


图1·7 未知量，已知量，条件

如果你不能解出所提的问题，那么就考虑一个适当的与之相关联的问题。一个显然与之关联的问题是（假定读者已经知道它的解法）：从圆外一点作已知圆的切线。这个问题实际上是所提问题的极端情形，即两个给定圆中的一个退化为一个点。通过变化已知量这种最自然的途径便可以达到这种极端情形。我们可以采用很多方式去变化已知量；例如缩小一个圆的半径而让另一个圆不变，或是缩小一个圆的半径而放大另一个圆的半径，或是同时缩小两个圆的半径。这时，我们突然闪出一个念头，如果让两个圆同时按同样的速度缩小，那么两圆在相同的时刻里就减少了同一长度。画一画这个变化的图，我们就会看到，每一个公切线也在移动，但移动时保持着彼此平行，直到最后得到了图1.8。这也就得出了

解法：从较小的圆的圆心出发，作一条新圆的切线，这个新圆与较大的圆同心，它的半径是两定圆的半径之差。利用这样得到的图形作为一块跳板，由它出发，即可容易地得到所要求的外公切线（只需作两个矩形就行了）。

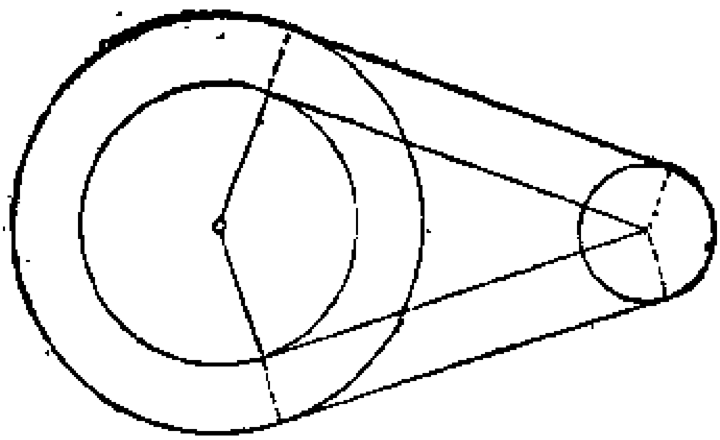


图1·8 跳板

(2) 给定三条中线，求作三角形。我们"设想问题已经解决了"；也就是说，画一个(所要求的)三角形，假设它的三条中线恰好就是给定的那三条（见图1.9）。我们应当记得，三条中线交于一点（图1.9中的M，亦即三角形的重心），这个点把每条中线分成1∶2。把这些事实画在图上，记线段AM的中点为D，则点D和点M就把中线AE分成相等的三部分（见图1.10）。

所求三角形分成了六个小三角形。你能解出问题的一部分吗？为了作出一个小三角形，需要有三个已知量；可我们只知道两条边：一边是一条给定中线的三分之一，另一边也是另一中线的三分之一，第三个已知量却不知道。那么，你能找出另外一些具有三个已知量的三角形吗？在图1.10中，

看来点D可望得出更多的关系——如果我们把点D和相邻的点联结起来，我们就会发现$\triangle MDG$的每一边都是一条中线的三分之一——于是由已知三边便可以作出此三角形——这就是一块跳板！剩下的事就容易了。

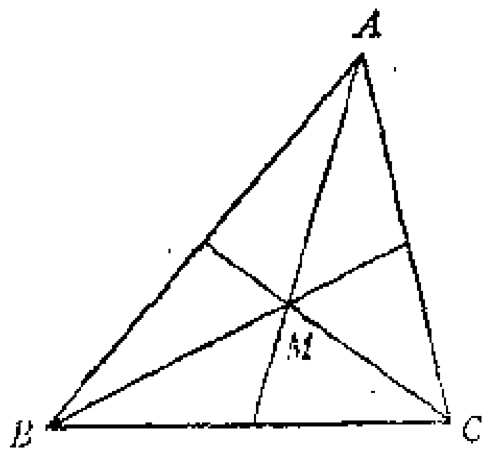


图1.9 未知量，已知量，条件

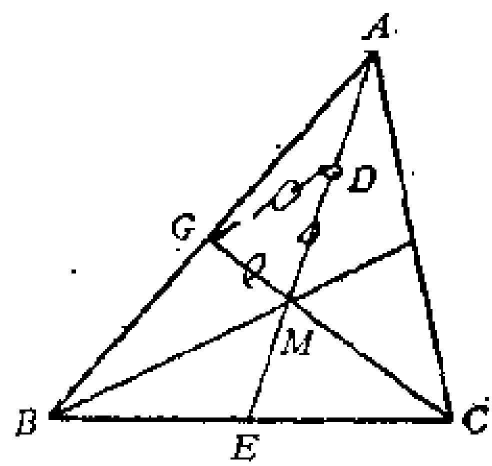


图1·10 可望得出更多关系的一个点

（3）对于每一个关于平面上三角形的问题，都有一个关于球面三角形*) 或三面角的问题跟它对应（所谓三面角就是含于三个平面之间的那个角；以这个角的顶点为球心作出来的球面交三面角于一个球面三角形）。因此立体几何的一些问题可以归结为平面几何的问题。这种把空间图形问题归结为平面图形问题，实际上，乃是画法几何研究的对象，它是几何学的一个有趣的分支，是工程师、建筑师在制作机器、船舰、建筑物等的精确图纸时所不可缺少的。

下述这个问题并不要求读者有任何画法几何的知识，只要有一点立体几何的知识和某些常识就行了。问题是：给定三面角的面角，作它的二面角。

*) 球面三角形就是球面上以大圆的弧为边的三角形。

令a、b和c表示三面角的面角（即对应的那个球面三角形的边），α表示面a所对的二面角（α是球面三角形的一个角）。问题就是给定了a、b、c，求作α（用同样的方法，可以作出所有的三个二面角，因此我们只要作出其中一个——α即可）。

将*已知量*先画出来。我们把a，b和c并列画在一个平面上，（见图1.11）。而为了将*未知量*画出来，我们应看一下图形在空间里的形状（将图1.11复制在硬纸片上，沿着a，b间和a，c间的那两条线折叠起来，便作出了这个三面角）。在图1.12中，我们看到的是这个三面角的透视图；A是在面a所对的棱上随便取的一点；从A点出发，引此棱的两条垂线，一条画在面b上，另一条画在面a上，这两条垂线的夹角就是我们所要求的那个二面角α。

请注意我们的未知量！——它是一个角，即图1.12中的角α。

你能用什么办法来得到这种类型的未知量呢？——通常的办法是通过一个三角形来确定一个角。

这个图里有一个三角形吗？没有，不过我们可以引进一个。

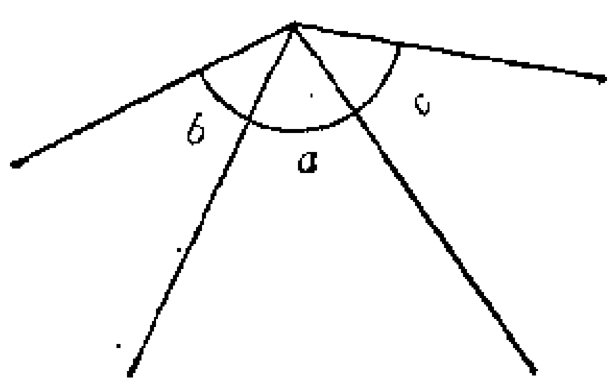


图1·11　已知量

实际上，存在着一条明显的途径：将包含角α的平面去截三面角，便得出了一个三角形，见图1.13。这个三角形是一个有希望的辅助图形，也是一块有希望的跳板。

到这里，离问题的解决已经不远了。我们回到平面图形——图1.11。在图中已知量即角a, b, c均按真值出现（展平那个把我们从图1.11带到图1.12的硬纸片模型），这时点A变成了两个点A_1和A_2（因为通过展平模型，我们把在空间中是毗连的两个面b和c拆开了）。这两点A_1和A_2到顶点V有相等的距离。通过点A_1垂直于A_1V的直线交角b的另一边于点C，同样地可以得到点B；见图1.14。现在，我们已经得到了图1.13中引进的那个辅助三角形的三条边，即A_2B, BC和CA_1，因而很容易地就可以把它作出来（即图1.14用虚线画的那个三角形），它含有我们所要求的角α。

这个问题跟我们在§1.1里对通常三角形所讨论的那个最简单的问题是类似的，而且用的也是同一种作图法。从这里可以看到关于运用类推法的启示。

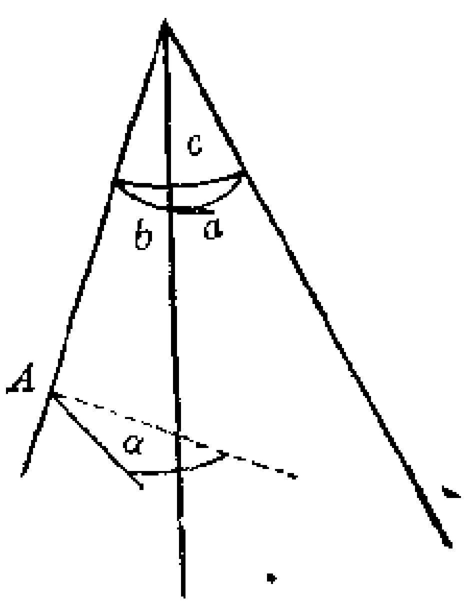


图1•12　未知量

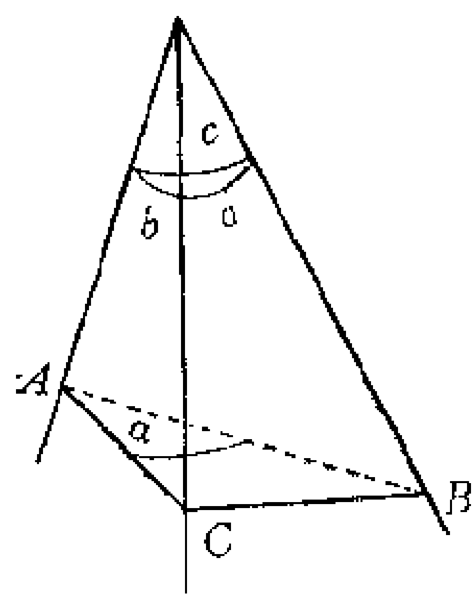


图1•13　有希望的跳板

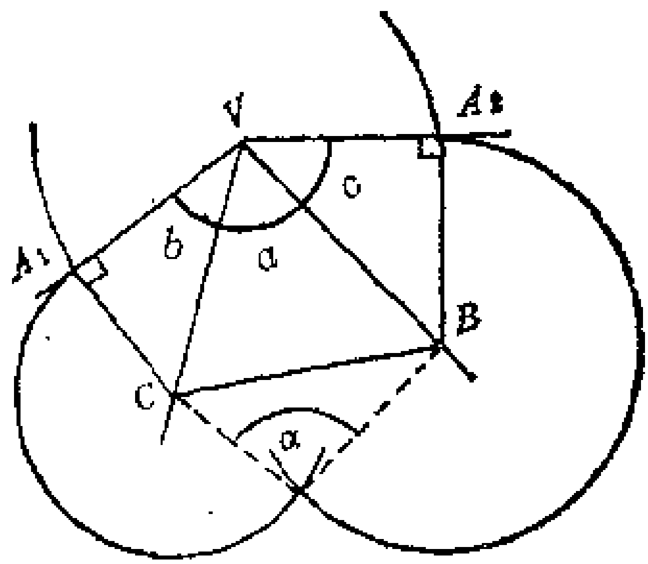


图1·14　解法

§1.7 辅助图形的模型

我们回顾一下在上面§1.6中所讨论的那些例子。它们的类型十分不同，解法也是十分不同的。但是在每个例子里，解题的关键都是一个辅助图形。这种辅助图形在（1）是一个圆和从圆外一点所作的两条切线；在（2）是由所求三角形中划出来的一个小三角形；在（3）是另一个三角形。在每一种情形，我们都容易地由已知量出发作出辅助图形，而一旦我们有了辅助图形，就能容易地藉助它作出原来所要求的图形。这样用两步便可达到我们的目的，其中辅助图形起着一种跳板的作用，它的发现是决定的一着，是我们作图中最关键之点。下面把它总结成一个模型，即辅助图形的模型，叙述如下：

试着去发现图形中的某些部分，或者某些与之密切关联的辅助图形，这些图形是你能作出来的，而且你还可以利用它们作为一块跳板去构造出原来所要求的图形。

这个模型叙述是相当一般的。实际上我们在 §1.5 中给出的相似图形的模型，只不过是它的一个特例：在这个例子中，那个相似三角形就是以相似这一特殊方式与原图形关联的一个特别方便的辅助图形。

辅助图形模型的很大的一般性必然使得它不那么具体，不那么确切。它并没有特别告诉我们究竟该去找些什么样的图形。当然，经验会给我们指出某些方向（虽然并不存在什么严格的、可靠的法则）：我们应当去找这样的图形，它们是容易从所求图形里“划分”出来的；或者是些“简单的”图形（如三角形）；或者是“极端情形”等等。我们可以学到这样一些方法，比如变化已知量或是利用类比等，在某些场合，它们是可以提示合适的辅助图形的。

至今我们已经分别给出了三种不同的用以处理几何作图问题的模型。辅助图形模型有较大的选择余地，但它比起相似图形模型来，目标并不是那么明确。双轨迹模型是最简单的——你可以首先用它去尝试一下，因为在大多数情况下，最好是先用最简单的模型去尝试。不过不要因此就把自己束缚起来，思想还是要开阔一些，设想问题已经解出来了，画一张图，把已知量和未知量很好地联系起来，使每一个元素都恰好在它的位置上，所有的元素都被由条件所确定的关系联系着。好好研究这张图，试着从里面看出某些熟悉的结构，试着回忆起那些你已掌握的有关知识（如相关的问题，可以用得着的定理等等），或是去找出一个缺口（譬如图形中比较容易入手的某一部分）。也许你走运，一个闪念会突然从图形里浮现在你面前，给你提供出一条很合适的辅助线或是一个恰当的模型，或是其他有用的步骤。

第一章的习题与评注

1.1 到定点的距离为定长的点的轨迹是什么？

1.2 与定直线等距的点的轨迹是什么？

1.3 到两定点的距离相等的点的轨迹是什么？

1.4 到两条给定的平行直线距离相等的点的轨迹是什么？

1.5 到两条给定的相交直线距离相等的点的轨迹是什么？

1.6 给定三角形两个顶点A和B，以及AB的对角γ，三角形并不确定，第三个顶点（即角γ的顶点）还可以变：问第三个顶点的轨迹是什么？

1.7 符号：在处理三角形时，为便利起见，引进下列符号：

A，B，C	顶点
a，b，c	边
α，β，γ	角
h_a，h_b，h_c	高
m_a，m_b，m_c	中线
d_α，d_β，d_γ	角平分线
R	外接圆半径
r	内切圆半径

约定角α所对的边是a，其顶点为A，即线段h_a、m_a和d_α的公共端点。按通常的用法，a既代表边（线段），也代表边的长度，读者可以从上下文里看出它的确切意思。对于符号b，c，h_a，……，d_γ，R，r也是如此。虽然存在含糊之处，不过我

们还是这样去用。

请注意作图时如果数据（已知量）选取得不好，问题可能是不可解的（即满足所给条件的图形可以不存在）；例如，当$a>b+c$时，以a，b，c为边的三角形就不存在。所以应当首先检验一下所给的数据，以判断要作的图形能否存在。

1.8 给定a，b，m_a作三角形。

1.9 给定a，h_a，m_a作三角形。

1.10 给定a，h_a，α作三角形。

1.11 给定a，m_a，α作三角形。

1.12 给定三条（无限长）直线，求作一圆，使它与前两条直线相切，并且圆心在第三条直线上。

1.13 给定两条相交的无限长直线和长为r的线段，作一圆使得它与两条给定的直线相切，而半径为r。

1.14 求作一圆，使它通过已给点，与给定直线相切并以给定长度为半径。

1.15 海图上标有三座灯塔，某船可以同时看到这三座灯塔，如果已测得从它们发来的光线间的夹角，试确定船在海图上的位置。

1.16 在给定圆的内部求作三个等圆，使得这四个圆彼此相切。（这样的图案有时我们可在哥德式建筑的窗子上看到，至于含有四个或六个内圆的类似的图案则更为常见）。

1.17 在三角形内部找一点，使得从它看过去，三条边具有相同的视角。

1.18 三等分给定三角形的面积。即在给定的$\triangle ABC$内部求一点X，使得$\triangle XBC$、$\triangle XCA$和$\triangle XAB$的面积相等。

〔保留部分条件，而扔掉其余的条件：如果只要求

$\triangle XCA$与$\triangle XCB$的面积相等，X有怎样的轨迹？这个问题的答案可以提供你一个解原题的思路，当然也可以用别的方法去解它。〕

1.19 给定a，α，r作三角形。

〔保留部分条件，而扔掉其余的条件：不考虑r，只保留a和α，内切圆的中心有怎样的轨迹？〕

1.20 给定a，h_b，c作三角形。

1.21 给定a，h_b，d_γ作三角形。

1.22 给定a，h_b，h_c作三角形。

1.23 给定h_a，h_b，β作三角形。

1.24 给定h_a，β，γ作三角形。

1.25 给定h_a，d_a，α作三角形。

1.26 给定一边和两条对角线，求作平行四边形。

1.27 给定四边a，b，c和d，其中a，c平行，求作一梯形。

1.28 已知四边形的四条边a，b，c，d 和两条对边a和c生成的夹角ε，求作此四边形。

1.29 给定a，$b+c$和α，作三角形。

〔不要忘记在图形里画上所有给定的数据。$b+c$ 应画在哪里？〕

1.30 给定a，$b+c$和$\beta-\gamma$，求作三角形。

1.31 给定$a+b+c$，h_a，α，求作三角形。

〔对称性：b和c（未给定）的地位是可以交换的。〕

1.32 给定两个没有公共部分的圆，求作其内公切线。（这两个圆在它们外公切线所决定的同一个半平面内，而在它们内公切线所决定的不同的半平面内。）

1.33 给定三个等圆，求作一圆包含此三圆并与三圆相切。

1.34 给定α，β，d_γ，求作三角形。

1.35 在给定的直角三角形内作一正方形，使得正方形的一角与三角形的直角重合，与此角相对的顶点在斜边上，而另外两个顶点分别在两条直角边上。

1.36 在给定的三角形ABC内作一正方形，使得它的两个顶点在AB上，另两个顶点分别在AC和BC上。

1.37 在给定的圆的扇形内作一正方形，使得它的两个顶点在圆弧上，而另外两个顶点分别在扇形中心角的两条边上。

1.38 求作一圆过两已知点且与已知直线相切。

1.39 求作一圆过已知点并与给定的两条直线相切。

1.40 在圆外作一外切五边形，已知它的五个角α，β，γ，δ和ε（当然满足$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=540°$）以及周长$l$。

1.41 给定h_a，h_b，h_c，求作三角形。

1.42 缺陷。可能会遇到一个几何作图问题是无解的情况，即不存在满足所给条件（附带给定的数据）的图形。例如：若$a>b+c$，则以a，b，c为边的三角形是不存在的。一个完善的解法应是或者得出满足所给条件的图形，或者证明这种图形是不存在的。

也可能会出现这种情况：所提问题本身具有一个解，而辅助问题却没有解——即按照我们制定的作图方案，那个为作出所求图形而必需的辅助图形是不可能作出来的。当然，这就反映了我们方案的缺陷。

你用以解习题1.41的方法是完善的吗？（以65，156，

169为边长的三角形是直角三角形，因为这些边与5，12，13成比例——而高则为156，65，60）如果答案是否定的，能改进你的方法吗？

1.43 给定a，α，R，求作三角形。

1.44 回过头来看看习题1.43的解，你可以追问若干有益的问题并提出一些相关的问题。

（a）一个类似的问题？

（b）一个更一般的问题？

（c）给定a，β，R作三角形。

（d）给定a，r，R作三角形。

1.45 三个监听站。三个监听站都记录了听到敌炮声音的时间，试根据这些数字，在地图上确定敌炮炮位X。

这里声速是已知的。试比较本题与1.15三个灯塔问题之间的相似之处与不同之处。

1.46 关于双轨迹的模型。对于习题1.2，1.5和1.6提到的轨迹，双轨迹模型适用吗？参阅§1.2最后关于双轨迹模型的一段文字。

1.47 三轨迹的模型。平面几何的概念在立体几何里可以有各种类比。例如，在§1.6（3）中，我们把球面三角形或三面角类比于通常平面上的三角形；我们也可以把四面体类比于通常平面上的三角形，按照这种观点，下面的问题：作给定四面体的外接球就是§1.3中（1）的问题的类比。

让我们详细地谈一下这个类比。我们把上述问题归结为求这个球的球心。在这个问题里

未知量是一个点X；

已知量是四个点（给定四面体的顶点）A，B，C和D；

条件是四个距离相等

$$XA=XB=XC=XD$$

我们可以把条件分成三部分：

i) $XA=XB$

ii) $XA=XC$

iii) $XA=XD$

条件的每一部分都对应一个轨迹。如果点X满足条件的第一部分，其轨迹为一平面（X可以在它上面变），即线段AB的垂直平分面；对条件的其它部分也对应了相应的平面。最后，球心乃是这三个平面的交点。

假定我们有仪器可以确定三个给定曲面的交点，这些曲面或者是平面或者是球面，（其实前面我们已经不明显地作了这个假定了。直尺和圆规就是这样的仪器，如果有足够的画法几何知识，我们就可以去求出那些交点）我们就可以提出并解决空间的几何作图问题。前面提到的问题是一个例子，而它的解则建立了一个藉助于类比来给出一个空间作图问题模型（三个轨迹的模型）的榜样。

1.48 象§1.3中的例（1）一样，在上题里，我们可以用不同的方法去分解条件，从而得出另一种极其类似的作图法，其结果会不一样吗？为什么？

1.49 关于几何作图。在许多几何作图问题中，虽然所要求的图形显然是“存在的”，但是却无法用直尺和圆规把它作出来（可以用其他的——同样理想化的——工具作出来）。这类问题中著名的一个就是所谓的三等分角问题：即用直尺和圆规不能把任意角三等分。（见Courant和Robbins, pp, 137—138。）

所谓一个完善的几何作图方法或者是应能引导我们用直尺和圆规作出所求的图形，或者应指出这种作图的不可能。我们讲过的那些模型（双轨迹，相似图形，辅助图形）虽非虚妄之谈（我希望读者对这一点已经有体会了），但它们却并不是完善的。因为它们常常只是提示某种作图的途径，而当它们提示不出什么东西的时候，我们就只好仍在黑暗中摸索，搞不清楚究竟是由于图形本身不可能作出来呢，还是由于我们的努力不够而没能作出来。

诚然，几何作图有一个熟知的比较完善的方法（即化为代数问题的方法），不过我们现在还不需要就去讨论它。日后我们可能会面临一些另一类的问题，到那时也许也没有解决它的完善方法，要求我们继续去探索。因此上面考虑过的种种模型，即便它本身是不完善的，也可以作为对解题者的一种教育内容。

1.50 更多的问题。设计一些与本章所提的问题（特别是那些你能解的问题）类似但又与它们不同的问题。

1.51 集合。我们不能用更基本的概念来叙述集合的定义，因为没有比它更基本的概念了。而事实上，每个人都是熟悉这个概念的，即使他并没有用"集合"这个词。"元素的集合"与"一类对象"，"一堆东西"或者"个体的综合"等语，意思基本上是相同的。如"在这门课程里得优的学生的全体"就构成一个集合，即使你不全知道他们所有人的姓名。"空间中到两个给定点距离相等的点的全体"构成一个非常明确的点的集合——这是一张平面。"在给定平面上距给定点有定距离的直线的全体"构成一个有趣的集合，这个集合是由一个圆的所有切线组成的。若a，b和c是任意三

个不同的个体，只以这三个个体作为元素的集合，很清楚是完全确定的。

如果任一个元素属于两个集合中的任一个，也必同时属于另外一个，则称这两个集合是相等的。如果属于集合A的任一元素也属于集合B，就说A包含在B中；也可以换成别的说法，如：B包含A或A是B的子集合等等。

引进空集合的概念往往是很方便的。所谓空集合指的是不包含任何元素的集合。例如，“这门课程里得优的学生的集合”，当所有学生在这门课程上的成绩都不高于良好，或是这门课程没有进行最后考试就中断了时，上面所谈集合就是一个空集合，正象0是一个有用的数一样，空集合也是一个有用的集合。0小于任何正数，空集合则是任何集合的子集合。

若干个集合的最大公共子集称为是它们的交集。也就是说，集合A，B，C，……，L的交集是由同时属于集合A，B，C，……，L的那些（而且仅仅是那些）元素组成的。

例如：设A，B是两个平面，把它们考虑成点的集合。如果它们既不相同又不平行，它们的交是一条直线；如果它们虽然不同，但却是平行的，它们的交是一个空集；如果它们是重合的，那么它们的“交”就是它们本身。如果A，B和C是三个平面，并且没有一条直线与它们都平行，那么它们的交就只有一个点。

“轨迹”一词的意思基本上跟“集合”的意思是一样的，例如到固定点距离都等于定长的点的集合（或轨迹）是一个圆。在这个例子里，我们是通过叙述这些元素（或点）必须满足的一个条件或这些元素（或点）必须具有的一个性

质去界定这个集合（或轨迹）的。

“条件”和“性质”的概念是跟集合的概念不可分地联结在一起的。在很多数学例子里，我们都能简单明了地把刻划集合元素的条件或性质陈述出来。当我们不能概括地表述出这些条件或性质时，我们就笼统说：集合S的元素具有属于S的性质，或是满足属于S的条件。

三轨迹模型的讨论（在双轨迹模型之后，见1.47）已经给了我们一个把模型推广的启示。关于集合及交集合概念的引进就更加强了这种推广的可能性，但这里我们暂且先把这一想法留给读者自己去思索，到了后面第六章我们再返回来考虑它。

〔干若个给定集合的最小扩充集合（每一个给定集合都是它的子集合）称为是这些集合的和集。这就是说，集合A, B，……，L的和集含有A的一切元素，B的一切元素，……和L的一切元素，而且和集里的任何元素必须至少属于集合A, B，……，L中的一个（也可以属于它们中的若干个）。

集合的交集与和集是密切相关的两个概念（我们在这里必须指出，它们在某种意义下是“互补的”概念）。如果不提其中的一个，我们就不能够很好地讲清楚另一个。当然，我们这里接触集合的交集的机会比之集合的和集来说是要多一些。读者应当从某些其他书里熟悉集合论的这些基本概念，它们在不远的将来可能便会引入中学的课程中去。〕

第二章　笛卡儿(Descartes)模型

§2.1 笛卡儿和他的万能方法

R.笛卡儿（1596—1650）是一个伟大的学者，他被公认为是近代哲学的奠基人。他的工作改变了数学的面貌，他在物理学史上也有一定的地位。我们在这里主要是想谈谈他的一个著作：思维的法则。（参看，习题2.72）。

笛卡儿在他的“法则”里，设计了一种能解各种问题的万能方法，下面就是他希望能用来解各种类型问题的这种万能方法的一个大概模式：

首先，把任何问题化为数学问题。

其次，把任何数学问题化为一个代数问题。

第三，把任何代数问题归结到去解一个方程式。

当你懂得的越多，你就越能看出这个设计的漏洞。笛卡儿本人后来想必也注意到了他的模式在某些情况下是不适用的；不管怎么说吧，他没有完成他的“法则”，在他后来的（为大家所熟知的）著作《方法论》里，也只谈了这一设计的若干片断。

看来笛卡儿模式里的想法有着某些深刻的道理；然而要把它们付诸实施就存在不少困难，真要实现起来会碰到很多障碍和错综复杂的问题，并不象笛卡儿在开始时热心想象的那样容易。笛卡儿的设想虽然最后并未成功，但它仍不失为一个伟大的设想，即使它失败了，它对于科学发展的影响比

起千万个碰巧成功的小设想来，仍然要大得多。

虽然笛卡儿的模式不能应用于所有的情况，但是仍能适用于非常多的情况，其中包括一些十分重要的情况。当一个中学生用“列方程”的方法去解文字题时，他正是按照笛卡儿的模式应用他的基本思想去做的。

因而，下面我们考虑一些中学教材中的问题是不无裨益的。

§2.2 一个小问题

下面这道智力测验题，也许曾在好儿个世纪里引起过人们的兴趣，今天它还会引起一些聪明小朋友的兴趣。

一个农夫有若干鸡和兔子，它们共有50个头和140只脚，问鸡和兔子各有多少？

我们来考虑儿种解它的办法。

（1）试探的方法。一共有50只动物。它们不可能全是鸡，因为50只鸡只有100只脚。也不可能全是兔子，因为那就应该有200只脚，然而现在只有140只脚。如果恰好有一半是鸡，另一半是兔子，那么就有……，让我们把所有这些情况列成表吧：

鸡	兔	脚
50	0	100
0	50	200
25	25	150

如果鸡的数目少一些，则兔子的数目就要多一些，这样得到的脚的数目也就多一些。反过来，如果鸡的数目多一些呢？……，对了，鸡一定多于25只，假定是30只吧，那么就有：

鸡	兔	脚
30	20	140

得出来了！这就是答案！

是啊，解是得出来了，但这要归功于这里给出的数字50和140，相对地讲比较小而且比较简单。如果同样的问题，给的数字比较大或比较复杂，再要用这种办法去解，就得费劲地一次又一次地去试算，还得靠点运气，才能好不容易把解碰出来。

（2）一个巧妙的想法：当然，我们这个小问题也可以少靠“经验”而多靠“演绎”来求解，这意思就是说，少试探，少猜测，多推理。下面是另一种解法。

农民惊异地看着鸡兔们非凡的表演：每只鸡都用一只脚站着，而每只兔子都用后腿站起来。在这种惊人的情况下，总脚数只出现了一半，即70只脚。在70这个数里，鸡的头数只数了一次，而兔子的头数却数了两次，从70里减去总的头数50，剩下来的就是兔子的头数

$$70-50=20$$

20只兔子！当然鸡就是30只。

当这个小问题里的数字（50和140）给得不那么简单的时候，同样可以这样求解。这个解法（可以叙述得不那么特别）是很巧妙的：它需要对情况有清晰的直观的理解，和一点小聪明，我祝贺那个14岁的小朋友，这是他自己想出来的。当然捷思巧想是不很多见的，这要有相当的造化才行呀！

（3）代数方法。如果我们懂一点代数知识的话，我们可以不凭偶然的试算，不凭运气，而用方程组去解决这个小问题。

代数是一种语言，它不是由字而是由符号组成的。如果我们熟悉它，我们就可以把日常生活语言里相当的句子翻译成代数语言。好，现在我们来试一试把这个小问题翻译一下吧。我们现在正是按照笛卡儿“把任何问题归结为代数问题”一步步地做。这个问题翻译起来很容易。

问题的陈述

生活的语言	代数的语言
农民有若干只鸡	x
和若干只兔子	y
它们有50个头	$x+y=50$
和140只脚	$2x+4y=140$

于是我们把问题归结成为一个二元一次方程组，要解这个方程组只需要很少一点代数知识就行了：我们把它重写成下面的形式

$$x+2y=70$$

$$x+y=50$$

把第二个方程代入第一个方程，便得

$$y=20$$

再把它代入第二个方程，得出

$$x=30$$

这种解法不管问题里的数字是大还是小，还是别的一些问题，都同样适用。它并不需要什么捷思巧想，而只要会用一点代数语言就行了。

(4) 推广。我们已经一再考虑过用别的数字，特别是较大的数字，去替换问题里的数字，这种考虑是有益的。如果

进一步用文字去替换数字，那好处就更多了。

在上题里，以h替代50，以f替代140，即用h表示头数，f表示脚数，这样代换以后，我们的问题就变了模样。我们还是把它翻译成代数语言。

农民有若干只鸡	x
和若干只兔子	y
它们共有 h 个头	$x+y=h$
和f只脚	$2x+4y=f$

这样得到的方程组可以改写成

$$x+2y=\frac{f}{2}$$

$$x+y=h$$

两式相减，可得

$$y=\frac{f}{2}-h$$

我们把这个式子重新翻译成通常的语言，即兔子的数目等于脚数的一半减去头数，正好就是在(2)里所想象的解法。

可是在这里我们并没有靠任何意外的侥幸或是什么特别的想象；我们只是做了简单的一步——把数字换成文字，然后就直接照常规过程进行，便得到了结果。这第一步确实是简单的，但却是推广的重要的一步[1)]。

(5)比较。把同一问题的不同解法加以比较是有益的。回过头来再看看上面提到的那四种解法，我们可以看出其中每

---

1) 参见 HSI推广 3，pp.109—110；问题的变形 4，pp.210—211；你能验证结果吗？2，p.60。

一个，即使是第一个，都有某些优点，都有它有意思的地方。

第一个方法，其特点为"摸"与"碰"，就是通常称之为试算与改进误差的方法。这一方法包含着一连串的试验，而后一个试验总是企图校正前一个试验所产生的误差；因此整个说来，在我们朝前走时，误差便会越来越小，从而试验结果也将越来越接近我们最后期望达到的目标。考虑到它的逐步改进这一特点，我们希望能找到一个比"试算与改进误差"更能表现它的特征的词，我们可以说"连续试验"或"逐步校正"或"逐次逼近"。从各方面看，最后这个词是最为合适的。逐次逼近法这一词能自然地用于各种水平的大量的各式各样的问题中。譬如当你查字典时，用的就是逐次逼近法。按你所翻到的字在你要查的这个字的后或前，再进一步朝前翻书页或是朝后翻书页。数学家可以把逐次逼近法应用于一个高深的论证，去处理某些无法用别的方法处理的具有重大实践意义的复杂问题。这一词甚至可以应用于整个科学领域；各种科学理论一个接一个出现，后者对现象的解释总比前者显得更好，这就是对真理的逐次逼近。

因此，教师不要因为学生使用了"试算与改进误差"这个方法而去责备他，相反的，倒是应当表扬他运用了逐次逼近法这种基本的方法。当然，他也应当指出对于鸡兔同笼这类简单的问题或很多其它的（比较重要的）问题，直接用代数方法要比逐次逼近法有效得多。

§2.3 列方程

在前一节的(3)里，我们把一个用普通语言叙述的问题翻译成由符号表示的代数语言。当然在那个例子里，翻译是较

容易的；但是在有些情况下，为了把问题翻译成代数方程组，则需要更多的经验和技巧，要花更多的力气[2]。

这个工作的特征是什么呢？笛卡儿本想在他的“法则”的第二部分里回答这个问题，但是他没能完成它。我想抽出他的书里与我们现阶段学习密切相关的若干部分用当代的语言表述出来。这里我将要把笛卡儿曾经讲述的很多东西撇在一边，而要把少量他讲得含糊的东西明确起来，但我想我并不会歪曲他的原意。

我希望按笛卡儿的方式来陈述：即开始是一段简洁的“告白”（实际上，类似于一个摘要），然后加上一些注解去解释它。

（1）首先，要在很好地理解了问题的基础上，把问题归结为去确定若干个未知的量（法则XⅢ—XⅥ）。

在还没有吃透问题前就把时间花上去，那是不聪明的。所以首要的和最明显要做的事就是要先理解问题，弄清它的意义和它的意图。了解了问题的全貌之后，我们便可把注意力转向它的主要部分。我们必须十分清楚地弄明白：

哪些东西是我们应当去求的（即未知量）

哪些是给定的或已知的（即已知的数据）

未知量和已知量彼此是以怎样的关系互相联系着的（即条件）。

（在§2.2(4)里未知量是x和y，已知量是鸡和兔子的头数h和脚数f。条件则先是用话叙述，然后再用方程表示出来的。）

2）参见HSI，列方程，pp.174—177。

遵照笛卡儿，我们现在只限于考虑那些未知量是数量的问题，（即未知量是一些数，不一定是整数）。其他类似的问题，如几何和物理问题，有时也可以归结为这种纯数量型的问题，关于这一点，我们将在下面用例子来说明。（参看§2.5和§2.6。）

（2）用最自然的方式通盘考虑一下问题，设想它已经解出来了，把已知量和未知量之间根据条件所必须成立的一切关系式都列出来（法则XⅦ）。

我们想象那些未知量已经取到了使问题的条件都满足的值，也就是说："设想问题已经解出来了"；参看§1.4。因此，我们可以把未知量和已知量同等看待，并把它们按条件要求必须满足的那些关系都列出来。我们要通盘考虑和研究这些关系，正如在§1.7的末尾，我们为了作图而通盘考虑和研究几何图形一样。其目的就是为下一步该怎么做寻求某些启示。

（3）析出一部分条件，使得你能用两种不同的方式去表示同一个量，这样可以得出一个联系未知量的方程式。这样做下去，最后就把条件分成了若干部分，从而得出方程式与未知量个数相等的一组方程组（法则XIX）。

上面叙述的只是笛卡儿法则XIX的意译。在讲完这些话之后，笛卡儿的手稿上出现一大段空白，缺掉了法则陈述后应当有的一段解释（或许他根本就没有写）。所以，这里我们只能讲点自己的看法。

法则的目的讲得很清楚，就是应当得到一个有 n 个未知量和 n 个方程的方程组。解出这些未知量，也就解决了所提的问题。因此，方程组就必须等价于所给的条件。如果整个

方程组就体现了全部条件，那么，每一个单个方程就应当表示一部分条件。于是，为了列出 n 个方程，我们应该把条件分成 n 个部分。但是怎样去做呢？

前面(1)和(2)的讨论（它们大体上给出了笛卡儿法则XⅢ—XⅦ的要点）给出了某些启示，但并没有明确的作法。当然，我们应当把问题领会透彻，我们必须非常、非常清楚地弄明白未知量、已知量和条件。我们也可以在通盘考虑各部分条件和具体列出未知量和已知量之间的关系中有所获益。所有这些，将使我们有机会得出那个方程组，当然也不完全有把握。

在上面提到的"告白"（法则XIX的意译）里，还强调了另一种想法：即为了得到一个方程，我们必须用两种不同的方法去表示同一个量。（§2.2的例(3)里，有一个方程就是用不同的方法表示了脚的数目。）真正弄懂这句话，常常有助于我们列出未知量满足的方程；在方程列出以后，我们也经常借助它去解释方程。

简言之，这里只是提出了一些好的建议，并没有什么列方程的简单诀窍。然而，当没有现成的规则可循时，我们也就只好求助于实践了。

（4）将方程组化成一个方程（法则XXI）。

这里意译的这条笛卡儿法则XXI，后面是没有任何解释的（实际上，它在笛卡儿的手稿里是最后一句话）。我们在这里不想去追究在什么条件下才能把代数方程组简化成一个单个的方程，也不考虑怎样去实现这个步骤；因为这些是属于纯数学理论的问题，它们比起那几句引起我们猜测的笛卡儿的简短告白来，当然要复杂得多。实际上这方面的数学理

论现在已经相当发展了，不过这一点和我们没有什么关系。因为在我们需要的那些简单情况里，少许代数知识就足够去进行简化了。

还有一些我们应该关心的问题没有去探究。不过我们先考虑一些例子，然后再去研究它们会更好些。

§2.4 课堂举例

中学里的“文字题”，对于数学家说来，虽是件平常的事情，但对于中学生和中学教师来说，却并不那么简单。我认为，一个教师如果认真地把上面讲的那些笛卡儿的告白带到课堂教学里去并付诸实践，那就一定能避免很多现在在中学里常见的弊病和困难。

首先，学生在没有理解题目之前不应该动手作题。我们可以在一定程度上检查出学生是否真正了解了问题，那就是看他是否能够把题目复述出来，能否指出已知量和未知量，并用自己的语言把条件解释出来。如果他相当好的作到这些；他就可以着手作题了。

一个方程表示了一部分条件。学生应该能够说出他所列出的方程表示了哪一部分条件，而哪一部分还没有表示出来。

一个方程就是用两种不同的方法去表示同一个量。学生应该能够讲出哪一个量是这样表示的。

当然，学生必须具有有关的知识，没有这些知识他是不可能理解题目的。中学通常碰到的许多问题是“速率问题”（见下面的三个例）。在给他们作这类题前，学生应当对“速率”这一概念的某些形式——比例、均匀改变有一定了解。

（1）灌满一个水槽，第一个水管要用15分钟，第二个水管要20分钟，第三个水管要30分钟。如果三个水管同时打开，灌满一个空水槽要多少时间？

设水槽能盛g加仑水，那么第一个水管的流速是每分钟

$g/15$加仑

由于

流量＝流速×时间

t分钟内流过第一个水管的流量是

$$\frac{g}{15}\cdot t$$

如果同时开三个水管t分钟就可灌满水槽，那么水槽中的水就可以用两种方法表示：

$$\frac{g}{15}t+\frac{g}{20}t+\frac{g}{30}t=g$$

方程左端的每一项表示单独一个水管的流量，右端是三个流量的总和。

两端除以g，便得到时间t满足的方程：

$$\frac{t}{15}+\frac{t}{20}+\frac{t}{30}=1$$

当然，可以用不同的方法去导出方程，题目本身也可以用各种不同的方式推广和变形。

（2）汤姆做完一件工作需要3个小时，狄克要4小时，亨利则要6小时。如果他们同时去做这件工作（而且彼此不影响），多少时间可以做完？

汤姆每小时做这件工作的$\frac{1}{3}$；我们也可以说汤姆以每小

时做它的$\frac{1}{3}$的速度进行工作。因此t小时里汤姆做了工作的$\frac{t}{3}$。如果这三个男孩同时做，并在t小时内做完（假定他们彼此不影响——这是一个非常难确定的条件），那么整个工作就可以用两种方法去表示它：

$$\frac{t}{3}+\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=1$$

这里等式右端的1是表示"整个工作"。

这个问题和(1)几乎是相同的，连所取的数都是成比例的：

$$15:20:30=3:4:6$$

用字母给出这两个问题的一般模式是有益的。比较它们的解法，权衡一下在(1)的解法中引进g的利弊也是很有好处的。

(3) 一架巡逻机在无风的天气里时速200哩。它载有安全飞行4小时的燃料。如果它顶着时速20哩的风飞行，若要想安全返回，最多能飞多远？

在这里，我们应当假定风速在整个过程中是不变的，飞机的飞行路线是直线，而且飞机在最远处改变方向所需的时间是可以忽略不计的等等。所有的文字题都含有一些没有叙述出来的使问题简化的假定，需要由解题者自己从问题里去判断和提取出来。这是文字题的一个基本特点，不要总以为这是微不足道的，应当把它说明白。

如果我们把问题里的数字

$$220 \qquad 20 \qquad 4$$

换成一般的量

$$v \qquad w \qquad T$$

则问题会变得更有教益。这里v表示飞机在无风时的速度，w表示风速，T表示整个飞行时间；这三个量是已知数据。假设x是飞机离机场（在一个方向）的最远距离，t_1是出航的时间，t_2是返航的时间；这三个是未知量。我们把它们用简洁的表列出来：

	去程	返程
距离	x	x
时间	t_1	t_2
速度	$v-w$	$v+w$

（写出最后一行，实际上需要运动学里一些“朴素的”知识。）我们知道

$$\text{距离}=\text{速度}\times\text{时间}$$

我们把这三个量中每一个量都用两种方法表示出来：

$$x=(v-w)\ t_1$$

$$x=(v+w)\ t_2$$

$$t_1+t_2=T$$

于是就得出一个三元一次方程组，未知量是x，t_1和t_2。实际上，只有x是问题所要求的；t_1和t_2是辅助未知量，是我们为了使整个条件能更简洁地表示出来而引进的。消去t_1和t_2，就有

$$\frac{x}{v-w}+\frac{x}{v+w}=T$$

因此

$$x=\frac{(v^2-w^2)\ T}{2v}$$

剩下来用具体数字去替换v，w和T就没有什么困难了。考察所得的结果，并改变原始数据去验算它是很有意思的。

若$w=0$，则$2x=vT$。这显然是对的，因为整个飞行过程都没有风。

若$w=v$，则$x=0$。这也是显然的，因为面对速度为v的顶头风，飞机根本开动不了。

若w由$w=0$增加到$w=v$，则距离x按上述公式逐步减少。公式所得到的结果与我们不用任何代数单凭常识就推测到的结果是完全一致的。

如果只用具体数字数据而不用文字数据去解这个题，我们就不会有上述那些有益的公式讨论和数值验算了。当然罗，我们还可以有一些别的有趣的验算。

（4）一个商人有两种核桃：一种90美分一磅，另一种60美分一磅。他想把它们混在一起卖72美分一磅，为了得到50磅这种核桃，需要原来的两种核桃各多少磅？

这是一个典型的比较简单的"混合问题"。假设商人用了x磅第一种核桃，y磅第二种核桃；x和y都是未知量。写出下列未知量和已知量的一览表：

	第一种	第二种	混合
每磅的价钱	90	60	72
重　量	x	y	50

把混合物的总重量用两种方式表示出来：

$$x+y=50$$

然后把全部混合物的价钱也用两种方式表示出来：

$$90x+60y=72\times 50$$

于是得出一个二元一次方程组，未知量是x和y。读者自己可以毫无困难地解出

$$x=20,\qquad y=30$$

把"数字"换成"文字"，读者会得到一个问题，以后将会明白，它还有别的（更有趣的）解释。

§2.5 几何中的例子

我们只讨论两个例子。

（1）一个几何作图题。任何几何作图题都可以化为一个代数问题。在这里我们不讨论这个"化"的问题的一般理论[3]，只举一个例子。

三角区域由直线AB和两个圆弧$\widehat{AC}$，$\widehat{BC}$围成。其中一个圆的圆心是A，另一个的圆心是B，而且两圆彼此通过对方的圆心。作此三角区域的内切圆。

这种图形（图2.1）有时在哥德式建筑的窗户上可以见到。

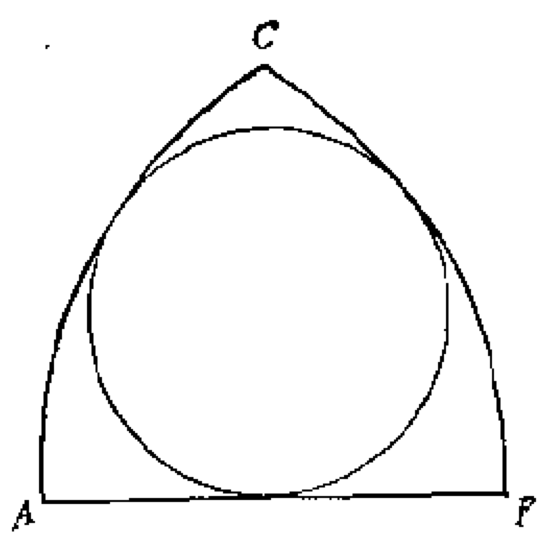


图2·1　哥德式窗户

3）见Courant-Robbins：《What is Mathematics？》（有中译本，书名为《近代数学概观》）pp.117—140.

显然，我们可以把问题归结为求一个点，即所求圆的圆心。这个点满足的一条轨迹是显然的，它就是线段AB的垂直平分线——给定三角区域的对称轴。剩下来还要找它满足的另一条轨迹。

保留一部分条件，扔掉其余的条件。我们考虑一个（变）圆。它不是与三条边界线都相切，而只与两条边界线——直线AB和圆弧$\overset{\frown}{BC}$相切（图2.2）。我们用解析几何来找变圆圆心的轨迹。设直角坐标系的原点在A点，X轴通过B点（图2.2）。设x，y是变圆圆心的坐标，把圆心与两个切点（一个是与直线AB的切点，另一个是与圆弧$\overset{\frown}{BC}$的切点）连接起来（图2.2）。这两个半径的长度应该相等，于是得到用两种不同方式表达的半径：

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

（其中$AB = a$），将方程有理化，即可化为

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

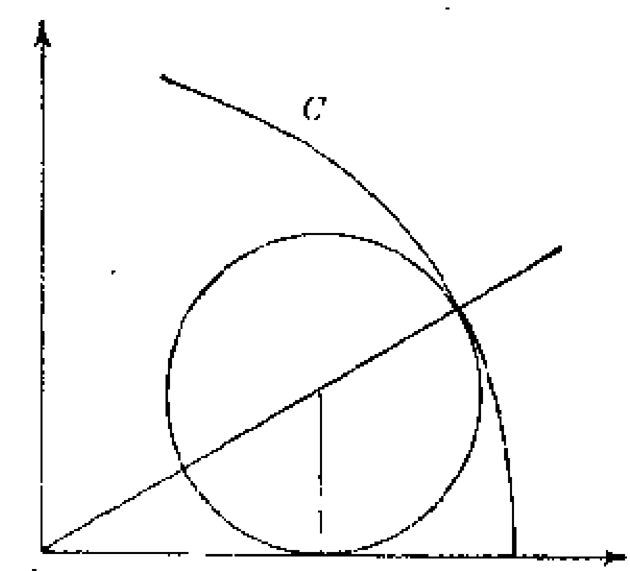


图2·2　去掉一部分条件

因此，变圆圆心的轨迹乃是一条抛物线——它在几何作图里不能直接运用。

可是，前面提到的那条明显的轨迹——AB的垂直平分线——方程是

$$x=\frac{a}{2}$$

把它与抛物线的方程联立起来，便得出所求圆心的纵坐标

$$y=\frac{3}{8}a$$

根据给定长度$a=AB$不难作出y来。

（2）毕达哥拉斯（Pythagoras）定理在立体几何中的类比。所谓类比，其含义并不是确切的，立体几何里有很多事实都可以看成是毕达哥拉斯定理的类比。我们在这里考虑的是下列情形：即把立方体视为是正方形的类比，而把一个四面角（用一个斜的平面从立方体上切下来的一角）视为是一个直角三角形（用一条斜的直线从正方形上切下来的一角）的类比。我们把与直角三角形的直角顶点对应的四面体的顶点称为三直角顶点。实际上，从它出发的四面体的三条棱是互相垂直的，因而形成了三个直角。

毕达哥拉斯定理解决了下列问题：直角三角形中，O是直角顶点，给定交于O的两条边（直角边）的长度分别是a和b，求与O相对的边（斜边）的长度c。

我们下边提出类似的问题：四面体中，O是三直角顶点，给出交于O的三个面的面积A，B和C，求与O相对的面的面积D。

我们要求的是把D用A，B和C表示出来。自然，我们希

望得到一个与平面几何中的毕达哥拉斯定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$

相类比的公式。有一个中学生猜它是

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$$

这是一个聪明的猜测，这里指数由 2 变到 3 纯粹是因为维数从 2 变到 3。

(3) 未知量是什么？——三角形的面积D。

你怎样才能求出这样一个未知量呢？怎样才能得到三角形的面积？如果已知三角形的三边，由海伦（*Heron*）公式可求出它的面积。我们这个三角形的面积是D，设a, b和c是它的边长，令 $s = \frac{a+b+c}{2}$，则由海伦公式

$$D^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

我们在图上标出D的三条边（图2.3）。

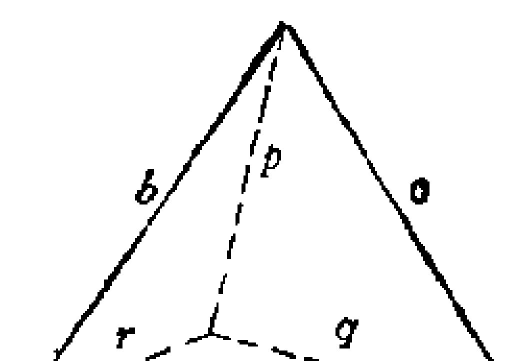


图2·3　空间的毕达哥拉斯定理

好了！但是a, b和c 知道吗？不知道，可是它们都在直角三角形中，如果已知这些直角三角形的直角边（图2.3中记为

p，q，r），则有

$$a^2=q^2+r^2,\quad b^2=r^2+p^2,\quad c^2=p^2+q^2$$

很好；但是p，q，r知道吗？不知道，可是它们与已知数据——面积A，B和C有关：

$$\frac{1}{2}qr=A,\quad \frac{1}{2}rp=B,\quad \frac{1}{2}pq=C$$

这很好；你是不是已得到什么有用的东西了？我想是的，现在我有7个未知量，

$$D$$
$$a,\quad b,\quad c$$
$$p,\quad q,\quad r$$

同时又有7个方程去确定它们。

（4）上面(3)的推理是无可非议的。我们按照笛卡儿的法则(见§2.3(3))达到了目的——得出了一个未知量和方程个数相等的方程组。只不过7这个数字太大了，解7个未知量的方程组困难一定很多。这里海伦公式并不那么招人喜欢。

感觉到了这一点，我们干脆从头再来。

未知量是什么？——三角形的面积D。

你怎样才能求出这样一个未知量呢？*怎样才能得到三角形的面积？*计算三角形的面积最熟悉的方法是：

$$D=\frac{ah}{2}$$

其中a是三角形的底边，h是高。我们在图上画出h（图2.4）。

是的，a前面已经有了；但h怎么办呢？我希望找出一个合适的三角形去计算高h。实际上，我们通过三直角顶点和h所决定的那个平面去截四面体，则所得的截痕是一个直角三

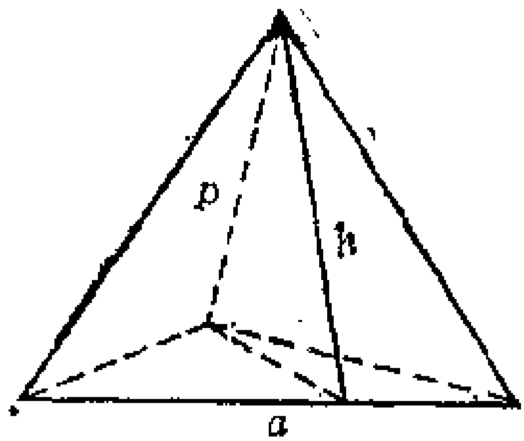


图2·4 新的出发点

角形，其斜边为h，一条直角边就是p（这在前面已见过），另一条直角边设为k，它是面积为A的那个三角形的底边a上的高。于是

$$h^2 = k^2 + p^2$$

很好！但k是什么呢？我们可以有办法得到它。把上面我们所提到过的那个以k为高的三角形的面积用两种不同的方式表示，可得

$$\frac{1}{2}ak = A$$

现在你已经有了与未知量个数相同的方程式了吗？我们得到了前面那些方程，我不想再去数它们了。我想我已经知道该怎么做了。让我把摆在面前的这几个方程联系起来：

$$\begin{aligned}4D^2 &= a^2h^2\\&= a^2(k^2 + p^2)\\&= 4A^2 + a^2p^2\\&= 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2\\&= 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2\\&= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2\end{aligned}$$

将等式始末两端相连，约去4，即得

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

这个结果跟毕达哥拉斯定理太相象了！那个带指数3的猜测是聪明的，虽然猜错了，但这没有什么可奇怪的。令人惊讶的倒是这个猜测离真正的结论是这么近！

比较一下同一个问题的上面这两种解法（它们在很多方面不同）也许是很有好处的。

你能想出毕达哥拉斯定理的一个别的不同的类比吗？

§2.6 一个物理中的例子

我们从下面这个问题开始。

铁球浮在水银里，在水银上倒上水，直到把球整个淹没，问球是下沉了，还是升高了，还是保持原来的深度不变？

我们来比较这两种情形。铁球的下部在两种情况下都浸在水银里（即低于水银面）。在第一种情况下球的上部是在空气（或真空）中，而在第二种情况下则是在水中。究竟在哪种情况下球在水银面上的那部分更大些？

这纯粹是一个定性问题，不过我们可以把它表达得更精确些，使它变成一个如下叙述的定量的问题（这样将更接近我们要用的代数）：计算一下在两种情况下铁球浮在水银面上部分体积的比例。

（1）用纯粹直观的推理，也可以对这个问题给出一个合乎情理的定性的解答。我们想象从一个情况连续过渡到另一个情况。也就是说，想象倒在水银上面把铁球上部淹没起来的那种液体连续地改变它的密度。刚开始时，这个想象的液体的密度是0（这恰好意味着真空），然后密度逐渐增加，

很快就达到空气的密度，过了一会儿，又变成水的密度。如果我们还没有看到这种密度改变对浮着的铁球有什么影响，那么就让密度继续增加下去。当想象的液体的密度达到了铁的密度时，铁球必然会从水银里明显地浮出。事实上，如果密度再增加那怕一点点，铁球就会忽然蹦起，从那个想象的液体中探出来。

很自然的，我们可以假定，在想象的液体密度增加时，浮球的位置的改变总是在同一个方向进行。由此，我们便能得到结论：当周围的空气变成水时，铁球将升起来。

(2) 为了定量的回答问题，我们需要知道这三种物质的比重：

水	水银	铁
1.00	13.60	7.84

不过，如果用字母替换这些数字，讨论起来会更好些。设

a	b	c

分别表示

上部液体	下部液体	浮体

的比重。设v是（给定的）浮体的体积，x是v在液体分界面上的部分，y是分界面下的部分（图2.5）。这里，已知数据是a，b，c和v，而未知量是x和y。当然，假定

$$a<c<b\text{ 。}$$

浮体的体积可以用两种方式表示出来，

$$x+y=v$$

现在，我们的讨论要进一步进行下去，就需要知道有关的物理知识。这里需要的有关知识是阿基米德 (Archimedes) 定律，通常可以表达成：物体受到的浮力等于物体排开的液

体的重量。我们考虑球在两层液体中都排出了一部分液体。所排出的液体重量在　　上部液体　和　下部液体中，分别是

$$ax \quad 和 \quad by$$

浮球的重量一定与这两个向上的浮力平衡。因此我们就能用

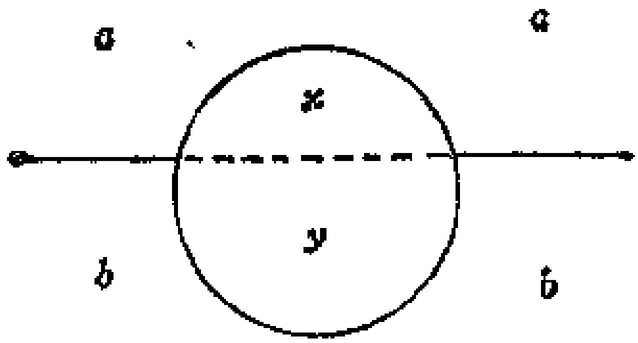


图2•5　浮在两种液体中

两种不同的方式表示它：

$$ax+by=cv$$

现在，我们得到一个二元一次方程组，未知量是x和y。解这个方程组，得到

$$x=\frac{b-c}{b-a}v, \qquad y=\frac{c-a}{b-a}v$$

(3) 让我们回到原题。第一种情形，如果水银上面是真空

$$a=0, \ b=13.60, \ c=7.84$$

则铁球在水银面上的部分是

$$x=0.423v$$

在第二种情况，当水银上面是水时

$$a=1.00, \ b=13.60, \ c=7.84$$

得

$$x=0.457v$$

后面这个数大些，与我们直观推理得到的结论一致。上面所得到的一般文字公式比起由它导出的任何数字结果要有趣得多。特别是因为它充分证明了我们的直观推理。事实上，保持b，c和v不变，而让a（上层液体的密度）从$a=o$增加到$a=c$，则x的分母$b-a$逐渐下降，于是x（v在水银面上的部分）就逐渐从$x=\frac{b-c}{b}v$增加到$x=v$。

§2.7 一个益智游戏

怎样把五个正方形作成两个正方形？图2.6是一个十字形的纸片；它由五个相等的正方形组成。把这一纸片沿一条直线裁成两半，然后再把其中的一片沿着另一条直线裁成两半，所得到的三部分适当地拼起来，就构成两个并列的正方形。

图2.6里的十字形是高度对称的（它有一个对称中心，四个对称轴），所求两个并列的正方形组成一个矩形，其长为宽的二倍。根据问题的要求，由十字形分成的三部分应该互不重叠地拼满这个矩形。

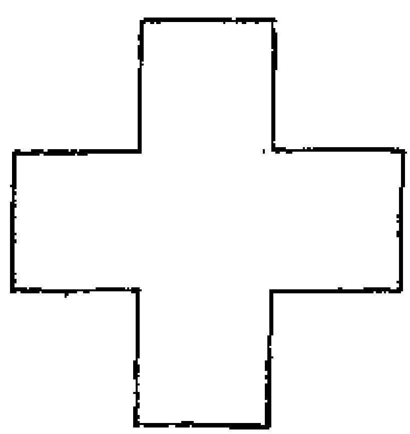


图2.6 从五个作出两个？

你能解决问题的一部分吗？显然所求矩形的面积应等于十字形的面积。设a是十字形中的小正方形的边长，则矩形面积等于$5a^2$。有了面积，就能求出矩形的边。设x是矩形的长；则宽为$\frac{x}{2}$。用两种不同的方式表示矩形的面积，得

$$x\cdot\frac{x}{2}=5a^2$$

或

$$x^2=10a^2$$

由此可解得矩形的两边。

我们已经知道了矩形的形状和大小，但是所提的这个益智难题还没有解决；我们还不知道怎样在十字形上裁那两刀。上面所得x的表达式可以给我们一点启发，我们把它写成下列形式：

$$x^2=9a^2+a^2$$

用这个提示，读者试自己把它解出来。

从上面这个问题的讨论里，我们可以得到一些有用的启示。

首先，它说明了代数，即使当它不能完全解决问题的时候，也是可以用得上的；它可能解决一部分问题，而这部分解可以使剩下的工作变得容易些。

其次，在上面所作的步骤里，它所特有的逐步扩张的格式给我们留下较深的印象。开头，我们只得到一小部分的解：所求矩形的面积。然后，我们用这一小部分又得到了较大的一部分：矩形的边；于是便得出了整个矩形。现在我们又试图用这个较大的部分去得出更大的部分，我们希望，对这更大的部分再继续这样做下去，最终将得到整个的解。

§2.8 两个迷惑人的例子

迄今为止，我们在本章所考虑过的问题都是“合理的”。这里所谓合理，我们指的是这样的问题，即它的解是唯一确定的。在我们认真研究一个问题时，我们当然希望尽早地弄清楚（或猜出）它是否是合理的。因此，从解题一开始，我们就应该对自己提出这样的问题：条件可能满足吗？决定未知量的条件充分吗？还是不充分呢？条件是不是有多余的？有没有互相矛盾的？

这些问题是重要的[4]。我们放在后面去一般地讨论它们在解问题中的地位，这里先考虑两个例子。

（1）某人步行5小时，先沿着平路走，以后上了山，然后又沿着原来的路线走回原地。假定他在平路上每小时走4哩，上山时每小时走3哩，下山每小时走6哩。求走过的总距离。[5)*)]

这个问题合理吗？已知数据足以确定未知数吗？还是不足以确定？有没有多余的？

看来数据并不充分，还缺少某些关于山路长度的数据。如果知道他上山或下山用了多少时间的话，也就没有困难了。而少了这部分数据，问题看来就不确定了。

不过我们还是试试吧。设

x为走过的全部距离，

4）见HSI，p.122：它能满足条件吗？

5）*）见L.Carroll，《错综复杂的故事》（难题1）。Carroll是英国数学家C.Dodgson的笔名，他由于写了《阿丽思漫游奇境记》而闻名世界，本书是他写的一本关于各种益智游戏、数学难题的书。

y为上山走的路，

行程可分成四段：

平路　　上山　　下山　　平路

现在我们不难把步行所用的全部时间用两种不同的方式表示出来：

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{\frac{x}{2}-y}{4}=5$$

两个未知量，只有一个方程——这是不充分的。不过，当我们合并同类项以后，y的系数就变成0了，剩下

$$\frac{x}{4}=5$$

$$x=20$$

于是已知数据充分确定了所要求的唯一未知量x。因此，问题并不是不确定的，我们想错了！

（2）我们想错了，这是不可否认的，不过我们怀疑题目作者在数字3，6和4的选择上耍了一些花招来迷惑我们。为了彻底弄清他的花招，我们把数字

3　　　　6　　　　4

换成文字

u　　　　v　　　　w

它们分别表示

上山速度　　下山速度　　平地速度

我们把换成文字的题目重读一遍，然后用文字把行程所用的全部时间用两种方式表示出来：

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{w}+\frac{y}{u}+\frac{y}{v}+\frac{\frac{x}{2}-y}{w}=5$$

或

$$\frac{x}{w}+(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w})y=5$$

这时，若y的系数不为0，就无法确定x。于是，除非有

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{2}\ (\frac{1}{u}+\frac{1}{v})$$

否则，问题就是不确定的。由于这三个速度的选择是任意的，当它们不满足这个关系式时，问题就是不确定的。原来是这么一个花招，竟使我们在前面堕入了五里重雾！

（我们可以把关系式表示成

$$w=\frac{2uv}{u+v}$$

这就是说：平地上的速度是上山速度和下山速度的调和中项*)。

(3) 两个较小的互相外切的圆都在第三个更大的圆的内部。三圆中任一个都与另两个相切，且圆心在同一直线上。已知大圆的半径为r，过两个小圆的公共的切点的切线在大圆内的长度为t。求大圆内小圆外的部分的面积。（图2.7。）

这个问题合理吗？已知数据足以确定未知量吗？还是不足以确定？有没有多余的？

问题看上去完全是合理的。因为为了确定三圆构成的图形，充分必要条件是知道两个小圆的半径，而这只要有任何两个独立的已知数据就行了。现在给定的r和t显然是独立

---

*) x称为正数a与b的调和中项，如果其倒数为a，b倒数的算术中项，即

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\ (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ 或\ \frac{2ab}{a+b}$$

的：我们可以改变其中一个而不影响另一个（当然必须满足$t\leqslant 2r$）。所以知道了数据r和t，条件似乎刚好就够了，既不多也不少。

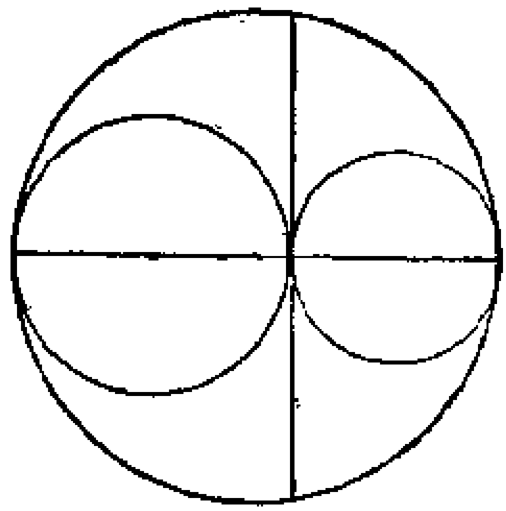


图2·7　两个已知数据

那么，我们就开始做吧。令A表示所求的面积，x和y分别是两个小圆的半径。显然

$$A=\pi r^2-\pi x^2-\pi y^2$$

$$2r=2x+2y$$

三个未知量是A，x和y，已有了两个方程。为了找第三个方程，考虑内接于大圆的一个直角三角形，它的底通过三圆的圆心，底所对的顶点是线段t的一个端点，三角形的高为$\frac{t}{2}$，它是一个比例中项（见《欧几里德原本》第四卷命题13）：

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2=2x\cdot 2y$$

这就得到了第三个方程。把后两式写成

$$(x+y)^2=r^2$$

$$2xy=\frac{t^2}{8}$$

两式相减得x^2+y^2，代入第一个方程，便得

$$A=\frac{\pi t^2}{8}$$

数据变得有多余的了：两个数据t和r，只有第一个是真正有用的，第二个没用上，我们又错了！

隐藏在这个例子里的那个古怪的关系*) 乃是阿基米德发现的；见T.L.Heath 编《阿基米德论文集》pp.304—305。

第二章的习题与评注

第一部分

2.1 鲍勃有3块半美元**) 全是5美分和10美分的硬币。如果共有50枚硬币，那么鲍勃有10美分和5美分的硬币各多少？（你见过这个问题的别的形式吗？）

2.2 将“数字”换成“字母”，推广§2.4例(1)中的问题，并考虑有若干条注入和流出的管子的情形。

2.3 试作出§2.4例(2)中所列方程的其他解释。

2.4 找出§2.4例(3)飞行问题中的解的其它验证法。

2.5 在§2.4例(4)的混合问题里，以字母

$$a \qquad b \qquad c \qquad d$$

代换数据

$$90 \qquad 60 \qquad 72 \qquad 50$$

---

*) 即大圆和小圆的半径可以随便变，只要小圆的切线段t不变，夹在它们间的面积就是一定的。

**) 1美元=100美分

列出方程来，你认识它们吗？

2.6 图2.8（它与图2.1有关但不同）是常见的哥德式窗饰的另一形状。

求与四条圆弧（它们组成“曲边四边形”）相切的圆的圆心。

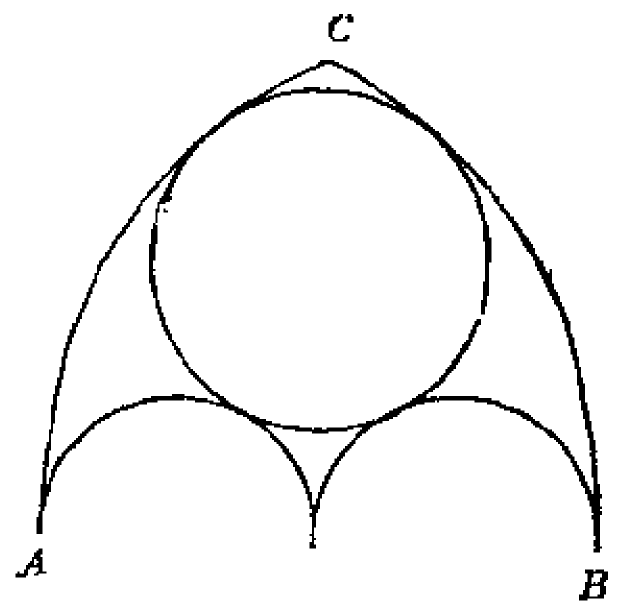


图2·8 一个哥德式的窗子

其中两个圆弧的半径为AB，一个圆心在A，另一个圆心在B。两个半圆的半径为$\frac{AB}{4}$，圆心都在AB上，一个是从A出发，另一个是从B出发，都终止于AB的中点，并且在该点相切。

2.7 将§2.5(3)提出的方案算到底，这就使你用另一方法得出了在§2.5(4)中已得到的同一个简单的表达式（即将D用A，B和C表示）。

2.8 比较§2.5(3)与§2.5(4)的解法（着重于一般观点）。

2.9 给定四面体，它有一个三直角顶点为O，过O的三个面的面积分别为A，B和C，求它的体积V。

2.10 海伦定理的一个类比。一个四面体具有一个三直角顶点。如果它的三直角顶点相对的面的三条边的长度是a，b和c，求它的体积V。

（若在V的表达式中，以适当对称的形式引入量

$S^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$，则所得结果就具有海伦公式某些类似的形式。）

2.11 毕达哥拉斯定理的另一类比。给定长方体的长、宽和高分别为p、q和r，求对角线长度d。

2.12 毕达哥拉斯定理的又一类比。给定长方体在某一顶点的三个交汇面的对角线长度a，b和c，求它的对角线长度d。

2.13 海伦定理的又一类比。设V是四面体的体积，以a，b和c表示它的某一面的三条边的长度，假定它的每一条棱都和与它相对的棱相等，求V。

2.14 试用$V=0$的退化的情形，检验习题2.10和2.13的结果。

2.15 解§2.7所提的益智游戏题（x与$\dfrac{x}{2}$是十字形图形被剪裁后得到的矩形的两个边，怎样才能在十字形里找到一条长为x的线段呢？）。

2.16 图2.9表示一个特殊形状的纸片——中间挖掉了一个矩形孔的矩形。设大矩形边的长为9和12，小矩形孔的边长为1和8，它们有公共的中心，并且对应的边是互相平行的。试沿两条线把它裁成两部分，再合在一起，使之能拼成

一个完整的正方形。

(a) 你能解决问题的一部分吗？所求正方形的边长是多少？

(b) 设想问题已经解决了。想象纸片已经裁成两部分——左部和右部。保持左部的位置，移动右部使之能与左部拼成一个正方形。假定知道了(a)的结果，你想用什么样的移动去实现呢？

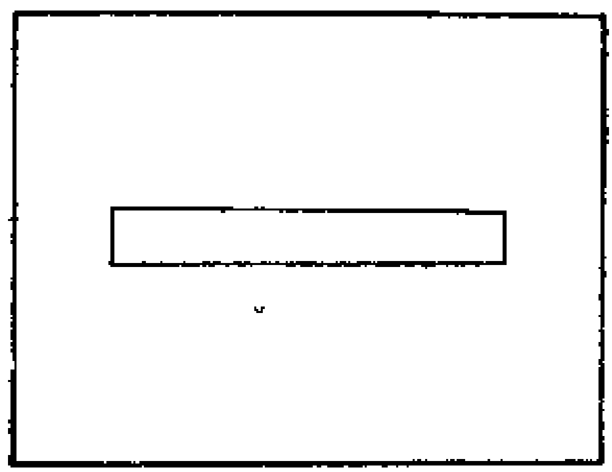


图2.9 两刀剪出一个正方形

(c)对解法的部分猜测。所给纸片关于它的中心以及互相垂直的两个轴是对称的，当你沿着所要求的两条线把纸片剪开时，你料想它能够把什么样的对称性保持下来呢？

第二部分

我们把下面的某些题，按照它的内容，分成若干组，在每一组的第一个例子前面，给出内容的标题（如杂题，平面几何，立体几何等等），某些习题在后面的括号里注上牛顿

(Newton）或欧拉（Euler）的名字，它们选自下列原著：

《一般算术》（Universal Arithmetick。）或《算术及解法》（Treatise of Arithmetical Composition and Resolution）。原著是依萨克·牛顿爵士用拉丁文写的，后来由拉尔菲逊（Ralphson）译成英文，1769年出版。(习题后面若注有“引自牛顿”字样，指的是出自此书，不过在陈述上或数据上稍有改变）。

《代数学原理》（Elements of Algebra）原著是李昂纳德·欧拉用德文写的，英文本1797年译自法文本。

依萨克·牛顿（1643—1727）是公认的科学巨人，他的工作涉及到力学原理，万有引力理论，微积分学，理论和实验光学以及其他一些较为次要的方面，他在上述任何领域里的工作都足以确立他在科学史上的地位。李昂纳德·欧拉（1707—1783）也是一个非常伟大的学者，他几乎在数学的每个分支和若干物理学的分支里都留下了足迹，对于牛顿、莱卜尼兹所发现的微积分的发展，欧拉的贡献比任何别的数学家都要大。我们这里想指出的是，象牛顿和欧拉这样伟大的学者，并没有认为详细地讲解用方程式去解“文字题”会降低他们的身份。

2.17 *杂题*。骡和驴驮了几百斤重物，驴子抱怨自己驮得太重了，它对骡子说：“只要把你身上的拿过来100斤，我驮的就是你的两倍啦”。骡子回答说：“是啊！可是如果把你的给我100斤的话，我驮的就要变成你的三倍啦。”那么，它们各驮了多少斤？（欧拉）

2.18 史密斯先生和他的太太坐飞机旅行，两人行李重量共为94磅。因为行李超重，史密斯先生付了1.5美元，史密斯

太太付了 2 美元。如果史密斯先生一个人带着全部行李旅行的话，则需付出13.5美元。问每位旅客可免费携带多少行李？

2.19 父亲死后留下1600克朗[*] 给三个儿子，遗嘱上说，老大应比老二多分200克朗，老二应比老三多分100克朗，问他们各分了多少？（欧拉）

2.20 父亲死后，四个儿子按下述方式分了他的财产：

老大拿了财产的一半少3000英磅。

老二拿了财产的$\frac{1}{3}$少1000英磅。

老三拿了恰好是财产的$\frac{1}{4}$。

老四拿了财产的$\frac{1}{5}$加上600英磅。

问整个财产有多少？每个儿子分了多少？（欧拉）

2.21 父亲给孩子们留下了遗产，他们按下列方式分配财产：

第一个孩子分得100克朗和剩下的$\frac{1}{10}$。

第二个分得200克朗和剩下的$\frac{1}{10}$。

第三个分得300克朗和剩下的$\frac{1}{10}$。

第四个分得400克朗和剩下的$\frac{1}{10}$，如此下去，

最后发现所有的孩子分得的遗产相等。问财产总数、孩子数

---

*）克朗是英国银币，合旧制二先令六便士。

和每个孩子得到的遗产数各是多少？（欧拉）

2.22 三人赌博。在第一轮里，第一人输给其他两人任一个的钱跟那两人原有的钱相等。在第二轮里，第二人输给第一人、第三人的钱等于他们已有的钱。最后，在第三轮里，第一人第二人从第三人那里赢得的钱与他们手中原已有的钱一样多。于是他们停了下来，发现他们大家的钱都是24个路易*)。问他们开始赌时各有多少钱？（欧拉）

2.23 三个工人做一件工作，A一人需要三星期做完，三个B需要8星期做完，五个C需要12星期做完。问他们一道去干，多少时间可以完成？（牛顿）

2.24 已知某些人中每一人的能力（即需要多少时间去干完一件工作）求他们一道干这件工作所需要的时间。（牛顿）

2.25 某人买了40蒲式耳**）小麦，24蒲式耳大麦，20蒲式耳燕麦，共用15磅12先令。第二次又用16磅买了26蒲式耳小麦，30蒲式耳大麦和50蒲式耳燕麦。第三次用34磅买了24蒲式耳小麦，120蒲式耳大麦和100蒲式耳燕麦。问各种谷物每蒲式耳的价钱。（牛顿）

2.26 （续）推广之。

2.27 12条牛4星期内吃光了$3\frac{1}{3}$英亩***）牧地，而21条牛9星期内吃光了10英亩牧地，问多少条牛在18星期内可吃

---

*）法国古代的金币。

**）1蒲式耳＝8加仑。

***）1英亩约等于4000平方公尺。

光24英亩牧地？（牛顿）

2.28 古埃及问题。我们的问题取自兰德草卷*)，那是我们关于古埃及数学知识的主要来源。原文谈到的这个问题是关于五个人分100个面包的问题，但是大部分条件没有表达出来（或是没有清楚地表达出来）。解法是采取“碰”，即先作一猜测，然后再去校正它[6]。

下面是用现代术语和抽象的形式表达的这个古埃及问题，读者可以进一步把它化为方程组问题：一个等差数列具有5项，它们的和等于100，三项大数的和等于两项小数的和的7倍，求等差数列。

2.29 等比数列有三项，它们的和等于19，它们平方的和等于133，求此等比数列。（引自牛顿）

2.30 等比数列有四项，两头两项的和为13，中间两项的和为4，求此等比数列。（引自牛顿）

2.31 若干商人共有股票8240克朗。每人再40次追加股份，每次加进的克朗数等于人数，他们每人获得的利润是总股份的$\frac{1}{100}$。在分利润时，他们发现，如果每人分十次，每次分得的克朗数都等于人数，则还余下224克朗，求商人数。（欧拉）

2.32 平面几何。在边长为a的正方形内有五个互不重叠的半径为r的圆。一圆的圆心与正方形的中心重合，其余四

*) 苏格兰人A.H.兰德（Rhind）于1858年发现的古埃及写于纪元前1650年的数学著作，写在草纸卷上，故称兰德草卷。

6) 参看J.R.纽曼（Newman）数学世界（The World of Mathematics），第1卷，pp.173—174。

圆与它相切，其中任一个还与正方形的两边相切（挤在一个角里）。试以a表示r。

2.33 牛顿谈几何问题如何列方程。假若问题涉及一个圆的内接等腰三角形，要将它的腰和底与圆的直径作比较。这个问题或者可以提为给定三角形的腰与底求直径，或者是给定腰与直径求底，或者最后，给定底和直径求腰。但不管问题怎样提法，它们都可以用同样的分析法，归结到一个方程式。（牛顿）

设d、s和b分别表示直径、腰和底的长度。（于是三角形的三边长为s、s和b。）求联系d、s和b的一个方程，使它能同时解下述三个问题：

已知s和b，求d

已知s和d，求b

已知b和d，求s

2.34 （续）研究习题2.33所得到的方程。

(a) 三个问题的难易程度相同吗？

(b) 所得到的方程对三种情形只是在某些条件下才有正的解（分别对应于d, b和s），这些条件是否都准确地与几何的状态相对应？

2.35 点G，H，V和U依次是四边形的四个顶点，测量员想知道UV的长度x，他知道$GH=l$，并测得四个角为

$$\angle GUH=\alpha, \angle HUV=\beta, \angle UVG=\gamma, \angle GVH=\delta,$$

试以α，β，γ，S和l表示x。

（回忆问题2.33，并按照牛顿讲的去做："选择那样的已知量和未知量，使得你最便于列出方程。"）

2.36 给定直角三角形的面积和周长，求它的斜边。（牛顿）

2.37 给定三角形的底和底上的高及三边之和，求三角形。（牛顿）

2.38 给定任意平行四边形的边及一个对角线，求另一对角线。（牛顿）

2.39 等腰三角形的腰为a，底为b。由此三角形中切去两个对称于底b上的高的三角形，使剩下的对称的五边形等边。试以a和b表示五边形的边长x。

〔比萨的里昂纳多（Leonardo of Pisa）*）又叫费波那契（Fibonacci）讨论过$a=10$，$b=12$时的情形。〕

2.40 等边六边形的边长为a，它有三个直角内角，且与另三个钝角内角交叉（设六边形为$ABCDEF$，令$\angle A$，$\angle C$和$\angle E$是直角，$\angle B$，$\angle D$，和$\angle F$是钝角）。求此六边形的面积。

2.41 一等边三角形内接于另一等边三角形，两三角形的对应边也互相垂直，于是大三角形被分成四块，每一块的面积是整个面积的几分之几？

2.42 用三条截线把已知三角形分成七块，四块是三角形（剩下的三块是五边形），其中一个三角形是由三条截线组成，另外三个均由给定三角形的某一边与两条截线组成。适当选择三条截线，使四块三角形全同。在这种剖分中，小三角形的面积是已知三角形面积的几分之几？

（先考虑一种特殊形状的已知三角形，对它来讲，解法特别简单。）

---

*）比萨的里昂纳多，又叫费波那契，（1170—1250）意大利数学家。

2.43 在矩形内选一点P，使得P到矩形的一个顶点的距离是5码，到对面顶点的距离是14码，到第三个顶点的距离是10码。求P到第四个顶点的距离。

2.44 已知正方形内一点到三顶点的距离是a，b和c；其中a和c是到相对两顶点的距离。

（Ⅰ）求正方形的边长s。

（Ⅱ）对下列四种特殊情形验证你的结果：

（1）$a=b=c$

（2）$b^2=2a^2=2c^2$

（3）$a=0$

（4）$b=0$

2.45 网球（相等的圆）在一张特别大的桌子（无限平面）上规则地排列起来，我们考虑下列两种排法。

第一种情形，每个网球都与其余的四个相切，而相切球的球心的联线把平面剖分成相等的正方形。

第二种情形，每个网球都与六个其余的球相切，而相切球的球心的联线把平面剖分成相等的等边三角形。

求平面被网球（圆）覆盖的面积在每一种情形下的百分比。

（第二种情形的片断见图3.8。）

2.46 立体几何。在边长为a的立方体（一个正方盒子）内有9个互不重叠具相同半径r的球（盒子里装了9个球）。其中一个球与立方体共心，而与其余8个球相切（球是紧紧挨在一起的），这8个球中的任一个都与立方体的三个面相切（挤在立方体的一角），试用a去表示r。

（或用r去表示a，即当你有了球以后，再去做一个盒子。

这个问题跟习题2.32里那个平面几何问题类似，你能用那里的结果和方法吗？）

2.47 试造一个类比于习题2.43的立体几何问题。

2.48 一个棱锥，如果它的底面是正多边形，并且顶点到底面的垂线通过底面正多边形的中心，就叫做一个正棱锥。

设正四棱锥的五个面的面积都相等，已知棱锥的高h，求它的表面积。

2.49 （续）正棱锥和等腰三角形之间有些类似之处；总之，如果给定了棱锥的侧面数，则无论立体的或平面的图形都只需两个数据就可决定了。

试造一些关于正棱锥的问题。

2.50 试造一个类似于习题2.38的立体几何命题。（习题2.12可以作为这个推广的一个跳板。）

2.51 求习题2.13里的四面体的表面积，假定a，b和c都已给定。（它跟什么类似？）

2.52 12个全同的等边三角形中，8个是正八面体的面，4个是正四面体的面，求八面体与四面体体积的比。

2.53 三角形先绕边a旋转，再绕边b旋转，最后绕边c旋转，得到三个旋转体。求这三个立体的体积比和表面积比。

2.54 一个不等式。矩形与等腰梯形的位置如图2.10所示，它们有公共的（垂直的）对称轴，高相等，且面积一样。如果$2a$和$2b$分别是梯形的上底和下底，那么矩形的底便等于$a+b$，绕它们公共的对称轴旋转，矩形便画出一个圆柱，而梯形则画出一个圆台。它们当中哪一个的体积更大？（你可以藉助几何得到答案，但必须用代数证明之。）

2.55 测球仪。球面上有4个点A，B，C和D，其中A，

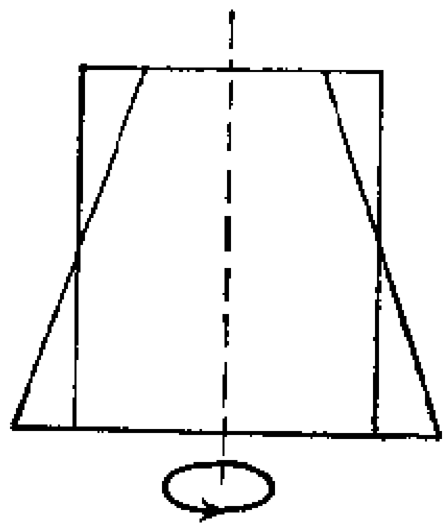


图2.10 旋转它!

B和C组成一个边长为a的等边三角形，点D到$\triangle ABC$决定的平面的垂直距离为h，垂足为$\triangle ABC$的中心，给定a和h，计算球半径R。

（上述几何问题乃是测球仪构造的理论依据。测球仪是一个测量透镜曲率的仪器。在测球仪上，A，B和C是三个固定的平行“腿”的端点，而第四个活动“腿”的端点用螺丝钉拧在位置D上，距离h可以用螺丝钉的旋转度数去测量。）

2.56 运动的几何图示。在考虑若干质点沿同一路径运动时，常引进一直角坐标系，横坐标表示时间t，纵坐标表示从某固定点沿路径走过的距离s。为了说明它的用途，我们重新来谈一下§2.4里的例（3）。

设从初始时间出发测得的飞机飞行时间和从起点测得的飞行距离分别是t和s。于是当飞机出航飞行t小时后，走过的距离是

$$s=(v-w)t$$

当v和w固定时，这个方程在坐标系中表示一条过原点的直线，斜率为（$v-w$）（速度）〔点（0，0）表示飞机的出发点〕。在返航途中，距离s和t满足关系式

$$s=-(v+w)(t-T)$$

这是一条过点（T，0）（设飞机在规定时间T返回到出发点）斜率为$-(v+w)$的直线。

两条直线的交点（既是空间的又是时间的）同时属于出航路径与返航路径，在该处飞机改变了飞行方向。因为s的两个表达式在该点都成立，故

$$(v-w)\ t=-(v+w)(t-T)$$

由此得

$$t=\frac{(v+w)T}{2v}$$

所以由方程得

$$s=\frac{(v^2-w^2)T}{2v}$$

这是飞机所能达到的最远距离。在§2.4（3）里，我们已

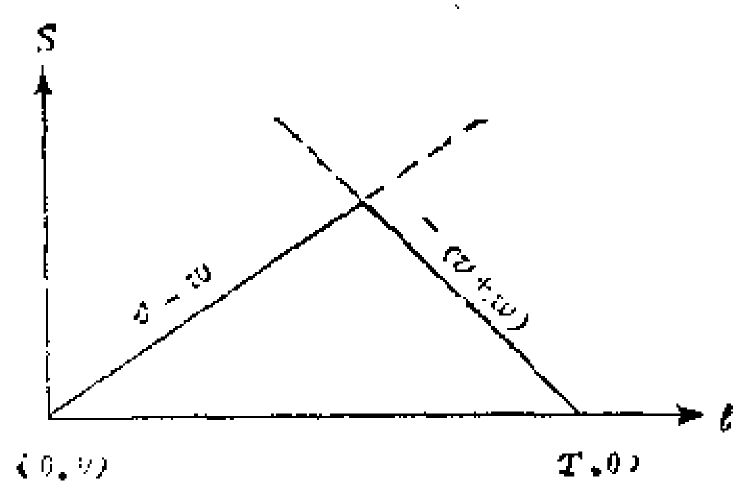


图2.11 运动的几何图示

得出这个结果（那时用x代替s）。

在图2.11中（不要看虚线），飞机的飞行过程由两个线段构成的折线表示，这两个线段在某点交成一角，该点的横坐标就表示飞机所能达到的最远距离。整个折线便刻划了飞行全过程，它显示了飞机在任何时间所达到的地点，以及达到任何给定点所需的时间，这条线便是飞行（所考虑的运动）的几何图形。

2.57 邮递员A和B相距59哩，相向而行。A两小时走了7哩，B三小时走了8哩，而B比A晚出发一小时，求A在遇到B前走了多少哩？（牛顿）

2.58 （续）推广之。

2.59 艾尔和彼尔住在同一条街的两头。艾尔要送一包果到彼尔家，彼尔也要送一包果到艾尔家。它们同时出发，各自的步行速度不变，而且把包送到目的地后，放下包果便立即回家。第一次碰面时，距艾尔家a码，第二次碰面时，距彼尔家b码。问

（1）街长多少？

（2）若$a=300$，$b=400$，谁走得快？

2.60 鲍勃、彼得和保罗一道旅行。彼得和保罗擅长走路，每小时走p哩，鲍勃脚不好，他驾了一辆小的双座车（不能坐三个人），每小时可行c哩。三个朋友按下列计划进行：同时出发，保罗和鲍勃坐车，彼得步行。过一会儿，鲍勃让保罗下车继续走，他返回接上彼得又继续向前开，直到赶上保罗。这时保罗和彼得再换一下，象出发时那样，整个过程便这样重复下去。

（1）他们每小时走多少哩？

（2）车上只载一人的时间占旅行时间的几分之几？

2.61 （续）推广：脚不好的鲍勃和他的小车同上题，但同行的却有n个朋友A，B，C，…，L（代替两个朋友），他们的步行速度都是p哩/小时。

（画出$n=3$的运动图，检验极端情况$p=0$，$p=c$，$n=1$，$n=\infty$。）

2.62 一块石头落入井内。试由石块撞击井底的声音确定井的深度。（牛顿）

你必须测得当石块开始下落与你听到石块撞底声音这两个瞬时之间的时间间隔T。此外，你还必须知道：

声速c和重力加速度g

问题就是给定T，c和g，求井深d。

2.63 假设彗星在直线上作匀速运动，试用三个观察记录去确定它的位置。（牛顿）

设O是观察者的眼睛，A，B和C分别是彗星在第一，第二和第三次观察时所处的位置。根据观察，我们知道角度

$$\angle AOB=\omega,\ \angle AOC=\omega'$$

和时间

t为第一次观察和第二次观察间的时间间隔

t'为第二次观察和第三次观察间的时间间隔

根据匀速运动的假设

$$\frac{AB}{AC}=\frac{t}{t'}$$

问题就是给定ω，ω'，t和t'，求$\beta=\angle ABO$。

（用ω，ω'，t和t'去表示β的某个三角函数，如$\mathrm{ctg}\beta$。）

2.64 方程个数与未知量个数相等。给定a，b和c，求解

方程组

$$3x-y-2z=a$$
$$-2x+3y-z=b$$
$$-x-2y+3z=c$$

（条件能满足吗？条件足以确定未知量吗？）

2.65 方程个数大于未知量个数。求p，q和r使得方程

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=(px^2+qx+r)^2$$

对一切x恒成立。

（这个问题要求对一个4阶多项式开平方根，对这个具体问题它是可能的，而在一般情形下它并不可能，为什么不可能？）

2.66 证明不可能存在数（实的或复的）a，b，c，A，B和C，使得方程

$$x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)(Ax+By+Cz)$$

对独立变量x，y，z恒成立。

2.67 方程个数小于未知量个数。某人用100克朗买了猪、山羊和绵羊共100只，其中猪$3\frac{1}{2}$克朗一只，山羊$1\frac{1}{3}$克朗一只，绵羊$\frac{1}{2}$克朗一只。问各买了多少只？（欧拉）

欧拉解这个问题用的方法是所谓的"盲人法则"。设x、y和z是猪、山羊和绵羊的数目，当然，它们应当是正整数。先写出它们的总头数，再写出总钱数，得

$$x+y+z=100$$
$$21x+8y+3z=600$$

其中第二个方程经过了简单变形。消去z，可解出y，得

$$y = 60 - \frac{18}{5}x$$

于是知

$$\frac{x}{5} = t$$

必须是正整数。剩下的请读者去完成。

2.68 制币者（我们希望他制造的钱不是假的）有三种银子，第一种的纯度是每马克（1马克＝8盎司）含7盎司，第二种的纯度是每马克含$5\frac{1}{2}$盎司，第三种是每马克含$4\frac{1}{2}$盎司。他想得到纯度为每马克6盎司的银子30马克，问需三种银子各多少马克？（欧拉，括弧里的话是作者附加的。）

这里要求的是整数解。求方程整数解的问题称为丢藩图问题*。

2.69 设一整数加上100得一平方数，加上168又得另一平方数，求该数。

2.70 鲍勃收集了三本邮票。第一本里的邮票占全部邮票的十分之二，第二本里有七分之几，而第三本里则有303张邮票，鲍勃有多少邮票？（条件足以确定未知量吗？）

2.71 学校对过的商店有一种很少人买的50美分一支的圆珠笔，商店降价以后，存货共卖得31.93美元，问现价多少？（条件足以确定未知量吗？）

2.72 笛卡儿的法则。我们在§2.1里引述的伟大哲学家和数学家R.笛卡儿的著作，对我们的学习特别重要。

---

*）丢藩图（Diophantos）是古希腊（公元二——三世纪）亚历山大城的数学家，曾研究整系数方程的整数解问题，这是数论中一个很困难的问题。

"法则"是在他死后出版的，它在笛卡儿的原稿中并没有完成。笛卡儿计划写36节，但是只有18节算是勉强完成了的，有3节只有概要，其余的很可能根本就没有写。前12节讨论在解题中有用的思考方法，后12节讨论所谓"完善"的问题，最后12节是打算处理"不完善的问题"[7]。

每一节开始都有一个"法则"，这是给读者的一条简明的告白，整个这一节就是谈法则所总结的思想产生的背景，以及它的解释、例证或详细说明。当我们引用某一节的任何段落时，只标明该节法则的编号[8]。

笛卡儿的话对我们当然是有指导意义的，但是如果你相信笛卡儿的话仅仅是由于它是笛卡儿讲的，那么，你就恰好违背了笛卡儿当初的本意。实际上，读者不应当盲目相信作者讲的，或是别的作者讲的东西，或是信赖自己匆忙中得到的第一印象。在很好地听了作者讲述之后，读者应当只接受那些他自己已经看清楚了的事情，或是经过深思熟虑并由自己的经验所证实了的事情。只有这样做才是按笛卡儿"法则"的精神办事。

2.73 剥问题的皮(将问题抽象化，简单化)。笛卡儿说："剥去那些多余的东西，把问题化为最简单的形式。"[9]

这个告诫，可以用于程度不同的各类的问题。不过，这里我们还是讲具体点，考虑一个课堂上常举的例题——关于

7) 法则 XIIpp，429—430。"完善的"问题可以很快化为纯数学问题，"不完善的"问题则不能，这似乎是两者最大的区别。

8) 笛卡儿的话引自C.阿达姆 (Charles Adam) 和P.坦纳雷 (Paul Tannery) 编汇的《笛卡儿全集》(Œuvres de Descartes) 在第十卷上有"法则"的拉丁原文 (pp.359—469)。

9) 法则XIII，p.430。

运动的速度问题（如§2.4的例（3））。问题里运动的物体可以是一个人，一辆汽车，一列火车或是一架飞机。事实上，它们之间没什么差别，因为在初等水平上解此问题，我们总是把它们当作在直线上作匀速运动的质点去处理。这种简单化在某些情况下完全是合理的，而对另一些情况则也许是荒唐的。当我们把实际问题化成数学问题时，某种程度上的简单化或抽象化自然是不可避免的。因为显然，数学问题处理的是抽象的量，因此只有藉助于上述那条从具体到抽象的途径，它才能跟实际对象间接地联系起来。

工程师和物理学家在处理他们的问题时，必须对问题作认真的考虑，究竟简单化、抽象化可以进行到什么样的程度，哪些是可以略去的，哪些小效应是可以不计的。他们必须注意避免两个极端：既不要把数学任务提得太难，变得似乎不可克服，又不要把物理状态过于简单化了。事实上，在处理最原始的实际问题时，我们一开始便会置身于这个两难的境地。因此，学会如何将问题简化到一个恰当的程度是初学者必须克服的一个困难，如果不能越过这一障碍，那将是很糟糕的。

这里还涉及一个困难，通常课本里的问题总是默许了某些简单化。例如，实际速度本来是变化的，但是在初级课本里所有的速度却都认为是常数。初学者必须逐步熟悉这类隐含的假定，他应当学会正确地解释那些已经简化了的公式，这一点至少是应该常常提出来讨论的。

（我们还应当提到一点，它也是很重要的，不过由于它离题太远，这里就只简单提一两句。在对未知量进行数值计算时，有一个精度问题，我们在对问题作简化与省略处理

时，应当把它与未知量的精度要求联系起来考虑。如果我们在计算时，比起原始数据所能保证的有效数字，多用了或是少用了十进位位数，那我们便作了"虚功"或是遗漏了什么。虽然在初级水平上阐明这一重要观点的机会是很少的，但切不可放过它们。）

在本书末尾列出的参考文献〔22〕里，对上面讨论到的一些观点，作了有益的，但并不特别引人注目的说明。

2.74 有关的知识动员与组织。显然，除非我们知道（或者说假定是知道的）有关的物理事实，否则我们是无法把一个物理问题化为数学问题的。例如，没有阿基米德定律的知识，我们便不能解§2.6里的那个问题。

在把一个几何问题化成代数问题，列出方程式时，我们要用有关的几何知识。例如，我们也许要用毕达哥拉斯定理，或是相似三角形边成比例，或是面积和体积的计算公式等等。

如果我们不具备这些有关知识，我们就不能把问题归结成代数的方程式。然而，即使我们曾经学过这些知识，但在我们需要用它们的时候，也可能会想不起来了。或者就是想到了也认识不到它们对手头的问题有什么用处。在这里我们可以清楚地看到：光是具备了那些潜在的必需的有关知识还是不够的，我们还应当在需要它的时候，能把它回忆起来，使它在沉睡中苏醒过来，把它*动员起来*，使它为我们的目的服务，把它*组织起来*，使它能适应我们的需要。

随着工作朝前进展，我们对问题的构思也会不断变化：一条条的辅助线作出来了，一个个辅助未知量出现在我们的方程里，越来越多的材料被动员起来，引进到问题中，直到

最后，达到了饱和，我们得到了恰好跟未知量的个数一样多的方程式，而原有的和后来陆续动员进来的材料也互相渗透形成了一个有机的整体。（§2.5(3))给出了一个很好的描绘）。

2.75 独立性与相容性。笛卡儿要求我们建立的方程其个数与未知量的个数一样多[10]。设n是未知量的个数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是未知量；那么所求方程就可写成形式：

$$
\begin{aligned}
r_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0\\
r_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
r\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0
\end{aligned}
$$

其中$r_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示x_1，x_2，$\cdots,x_n$的多项式，$i=1,2,\cdots,n$；此外笛卡儿还让我们逐步化简方程组，使得最后只剩下一个方程[11]。“一般来说”，这是可以做到的（即通常所谓正规的情形…），而且“一般来说”，方程组有解（即有一组实数或复数值x_1，x_2，$\cdots$，x_n，它们同时满足n个方程），并且这样的解只有有限个（解的个数依赖于最后那个方程的阶数）。

但是也有例外的（不正规的）情形，这里我们不能一般地去讨论它，只举一个简单的例子。

考虑一个三元一次方程组：

$$
\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0\\
a_2x+b_2y+c_2z+d_2&=0\\
a_3x+b_3y+c_3z+d_3&=0
\end{aligned}
$$

其中x，y，z是未知量，a_1,b_1，$\cdots,d_3$是12个给定的实数。

10） 法则XIX，p.468。

11） 法则XXI，p.469。

假定a_1，b_1和c_1不同时为0，同样的，对a_2，b_2和c_2以及a_3，b_3和c_3也作此假定。如果把x，y，z看作空间直角坐标系的坐标，则上述三个方程各表示一个平面；因此这个方程组就表示了三个平面的图形。

关于上述线性方程组，可有下列不同的情形。

（1）无解，即x，y，z取任何实数都不能同时满足三个方程。在这种情况，我们说这些方程是不相容的，面这个方程组就叫做不相容方程组或矛盾方程组。

（2）有无穷多个解；我们称此方程组为不定的。在这种情形下，如果满足方程组中两个方程的数组x，y，和z也都满足第三个方程，这时就说第三个方程是不独立的，它决定于其余两个方程组。

（3）有唯一解；这些方程是互相独立的，而方程组就叫做相容的和确定的。

试想象与上述情况对应的三个平面的相互位置，并具体写出来。

2.76 唯一解。预测。如果一盘棋或一个谜语有不止一个解答，我们就认为它是不完善的。一般来说，我们对只有唯一解的问题，似乎自然而然的有一种偏爱。在我们眼里，好象只有它们才是“合理的”，“完善的”。就连笛卡儿也不例外；他说过：“我们理想中的完善问题，是完全确定的问题，它的解答由已知量就可以导出来。”[12]

问题的解是唯一的吗？条件足以确定未知量吗？我们一开始解题时，常常就要问这些问题（而提这些问题是得当的）。这样早就问这些问题，并不是真的需要或是真的希望

12） 法则XⅡ，p.431。

得到一个最后的答案（最后的答案是要在问题完全解出来之后才能得到的），而只不过是想得到一个初步的答案，一个预测或是一个猜想（它们可以加深我们对问题的理解）。这个初步的答案往往证明是对的。当然，有的时候我们也不免会掉进陷阱，象§2.8的例子遇到的那样[13]。

2.77 为什么要解文字题？我认为中学数学教学最重要的一件任务就是讲授列方程解文字题．我希望这个主张能触动一些人。下面是支持此观点的一个有力论据。

在列方程解文字题时，学生要把一个实际问题翻译成数学语言；这就使他们有机会体验到数学的概念和具体的东西是可以联系起来的，不过这种联系必须仔细研究才找得出来。中学课程提供了这种基本训练的第一个机会。而对于以后在工作中不用数学的学生来说，这也就是最后一次机会了。可是对于工作中要大量用数学的工程师和科学家来说，他们主要要靠这一训练把实际问题翻译成数学概念。也许一个工程师可以靠数学家去替他解他的数学问题，这样，未来的工程师就可以用不着为了解题去学数学了。但是有一点他是不能完全依赖数学家的，这就是他必须懂得足够的数学知识，以便能把自己的实际问题变成一个数学问题。这样，未来的工程师当他在中学里学习列方程去解文字题时，便能第一次尝试到数学在他的工作里主要是怎么用的，也第一次有了这样的机会去锻炼自己，培养自己这方面的习惯。

2.78 更多的问题。设计一些与本章所提的问题（特别是那些你能解的问题）类似但又与它们不同的问题。

13） 这种例子还可参看MPR，卷Ⅰ，pp.190—192，和pp.200—202，习题1—12。

第三章 递 归

§3.1 一个小小发现的故事

卡尔·弗里德利希·高斯（Carl Friedrich Gauss）是一个伟大的数学家。关于童年的高斯，有一个传说，我在孩提时代就听说过，不管它是不是真的，我都特别喜爱它。

"事情发生在小高斯上小学的时候，有一天，老师出了一道难题：把1，2，3，……直到20都加起来。老师原来是打算在孩子们忙于去求这一长串数的和时，能得到点空闲，可是当别的孩子还刚开始去算这道题时，小高斯却走上前来把他的石板放在老师的桌子上说：'算完了。'这时，老师感到意外又极不高兴，他甚至不想去看一眼小高斯的石板，因为他断定答数一定是错的，并决定要严厉惩罚一下他的冒失。一直等到别的孩子都把石板交上来以后，他才从最底下把小高斯的那块石板抽出来看，当他发现石板上的数恰恰就是那个和数时，简直有点惊呆了！这个数小高斯是怎样算出来的呢？"

当然，我们并不确切知道小高斯是怎样算的，也许这是我们永远也不可能知道的。不过我们可以作一些合情合理的猜想。小高斯还是个孩子，但他是个特别聪明的早熟的孩子。他可能比同年龄的其他孩子能更自然地领悟问题，把握问题的实质。他比其他的孩子更能清楚地去想象要求的是什么，就是如何找出

$$
\begin{array}{r}
1 \\
2 \\
3 \\
\vdots \\
+\ 20 \\
\hline
\end{array}
$$

的和数。

他的考虑一定与其他的孩子不同，他想得更全面些，也许他的思考经历了象图 3.1 中那一串图表 A，B，C，D，E 所示的那样的过程

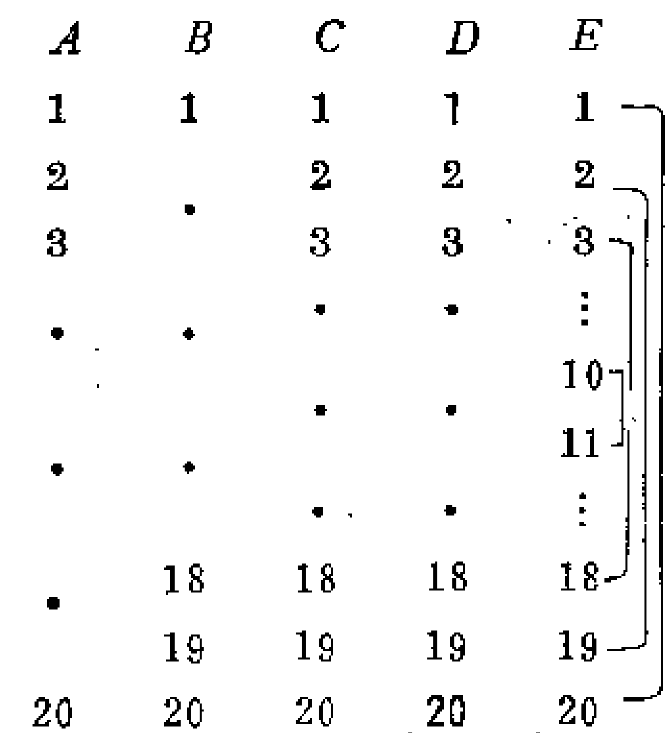


图 3-1 发现的五步

问题原来的叙述着重于这一串数的头几个数（图 A），但是也可以着重在这一串数的末尾几个（图 B）。还有更好一点的，就是把两头都看到（图 C）。这时，我们的注意力可能会落到两端的数上，第一个数和最末一个数，看到它们间

有某种特殊的关系存在（图D），于是主意就有了（图E）：把两端的数一对一对加起来，它们的和都相等

$$1+20=2+19=3+18=\cdots=10+11=21$$

因此，整个这串数的总和乃是

$$10\times21=210$$

小高斯真的是按这个办法做的吗？我可不敢这样断定，我只是说按照这种办法去解这个题是比较自然的。我们是怎样去解它的呢？最后我们发现了（E），正像笛卡儿说的，我们"明确而清楚地看到了真理"，从而找到了一个方便的，省劲的，最适宜于求出这个和数的方法。我们是怎样达到最后这一步的呢？开始时我们迟疑于相反的两种思路A、B之间，而后来把它们成功地合并于一个较好的更平衡的形式C中。原来是对立的，现在变得和谐了，而再从C转到最后的想法就十分近了。小高斯最后的想法也是这样吗？他也是经过这些步骤得出来的吗？也许他跳过了其中的某几步？也许他跳过了所有的步骤？他是不是一步就跳到最后的结论上？我们回答不了这些问题。通常一个明快的思想总是在长期的或短暂的犹豫、拿不定主意之后才浮现出来的，我们自己有这种情形，同样的事情在小高斯的思维过程中也可能会碰到。

推而广之，在上面的问题里，用正整数n去替换20，便得到下述问题：*求前n个正整数的和S*。

我们要找和数

$$S=1+2+3+\cdots+n$$

前面我们建立的方法（它可能就是小高斯的方法）就是把这些项配对，让与1相隔某一距离的数和与n相隔同一距离的

数配成一对。如果我们熟悉某些代数的手法，我们就能够很容易地把推导变成下面的格式。

把这串和写两遍，第二遍把次序倒过来：

$$S=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

$$S=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$$

在前面求解中配成对的项现在已经一个写在另一个的下面，很好的排起来了，将两个等式相加，便得

$$2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)$$

$$2S=n(n+1)$$

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

这是一个一般的公式，当 $n=20$ 时，正好就是小高斯得到的那个数。

§3.2 帽子里掏出来的兔子

本节提出一个推广的问题：求前n个正整数的平方和。这个问题与上节解决的问题类似。

设 S 为所求和数（我们不再受上节所用的符号的拘束），则

$$S=1+4+9+16+\cdots+n^2$$

计算此和数的方法并不那么显然。人们总是自然地想着去重复使用过去在类似的情况下已获得成功的那些方法。因此，我们也自然想起了上一节的方法，试着把和数写上两遍，第二遍写的次序是颠倒的：

$$S=1+4+9+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2$$

$$S=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+9+4+1$$

然后把这两个方程相加。虽然这个方法在解上一个例子时很成功，可现在却是一无所得，我们的试验失败了。实际上，我们这样做，更多地是出于盲目乐观，而不是理智。我们得承认，死板地硬套所选择的模型乃是愚笨的（这是思维惰性的一种表现，我们的思想还停留在前面那个例子上，虽然现在情况已经变了）。当然罗，这样一个不对头的尝试，也不能说一点好处也没有，它至少可以促使我们对问题作出更恰当的估计：是啊，看来它比上一节那个问题要难些！

好，下面我们提出另一种解法。我们从熟悉的二项式展开公式的一个特殊情形出发：

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

由此可得

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

它对任何正整数 n 都成立，我们逐个地把 $n=1，2，3，\cdots，n$ 的情形都写出来：

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$$

$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$$

$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

下一步该怎么做呢？显然应当把它们加起来，幸亏很多项都消掉了，结果方程左边剩下的变得非常简单。而右边，我们按三列把它们加起来，第一列的就加出 S 来了，正是我们所要求的平方和，太好了！最后一列是n个 1 的和，也很容易。中间一列加出来的是前n个正整数的和，这是我们已经知道的。这样便得到

$$(n+1)^3-1=3S+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

在这个方程里，除了 S 以外，其他都是已知的（即可由 n 表示的），因而可由此方程确定 S。事实上，

$$2(n^3+3n^2+3n)=6S+3(n^2+n)+2n$$

$$S=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

最后得

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

你觉得这个解法怎么样？

谁要是能讲出他不喜欢这个解法的充足理由，我是很欣赏的。这个解法究竟哪里不好呢？

这个解法当然是对的，而且它是那么清晰、简捷而又有力。要记住，这个问题乍看起来是困难的，所以我们没有理由再希望能找到一个更清晰简单的解法。在我看来，这里只有一个正当的反对理由，就是说，这个解法太突如其来了，不晓得是从哪里蹦出来的，简直就象从帽子里掏出来一只兔子一样。我们试把现在的解法与上一节的解法比较一下。在上节里，我们多少能讲出一点解法的来龙去脉，也可以学到一点关于发现事物的方法，我们甚至会建立某种信心，希望有一天自己也会成功地找出一个类似的解法来。然而在本节，我们却未能见到关于发现的来源的任何提示，我们仅仅在本节的开头看到了那个方程（从它出发推导出了一切），至于我们自己如何才能去找到这个方程，却并没有说出任何道理。这有点令人失望，我们到这里来是学习怎样解题的，

那末，从上面给出的解法里，我们如何才能学到些东西呢？[1]

§3.3 不要光看不练

是的，从上面那个解法里，我们应该能学到一些重要的东西。但上面的解法在叙述上缺乏启发性，方法的来龙去脉看不清楚，因此使得解题本身看上去象是变戏法似的。你想要弄清楚戏法的内幕吗？那么你自己亲身去变变这个戏法，你就会清楚了。这一招真是想得太好了，那么现在我们就来施一施这个妙招。

下面我们从推广上两节所考虑的结果开始。我们把上两节的问题统一于一个更一般的问题之下，即求前几个自然数的k次幂的和

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

由前两节，我们已有

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

这里再加入当$k=0$的极端情形，即

$$S_0 = n$$

它在以下论述中或许是有用的。从$k=0$，1和2的特殊情形出发，我们提出一般问题：将S_k象S_0，S_1，S_2那样表示出来。综观这三个特殊情形，我们推测S_k可以表成为n的$k+1$阶多项式。

很自然地，我们要把对$k=2$用得很成功的那个“戏法”

---

1) 参见MPR，卷Ⅰ，pp.146—148，“deus ex *machina*”和“证明是有启发性的”。

拿来对一般情形试一下。不过，还是先考虑一下紧接着的那个 $k=3$ 的情形吧。我们把 § 3.2 里见过的方法，放到高一阶的情况下模仿使用，也许不致于发生很多困难。

我们从利用指数比 3 再高一阶的二项式公式出发

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

可得

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n_2+4n+1$$

它对一切正整数 n 都成立。把 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 的情形依次都写出来：

$$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$$
$$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$$
$$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

和前面一样，把这n个方程 加 起来。左边的很多项相互抵消了，右边分成四列去加，每一列都含有前n个正 整 数的某个方幂的和，事实上，每一列都出现某一个 S_k：

$$(n+1)^4-1=4S_3+6S_2+4S_1+S_0$$

前面我们已经通过 n 表示了 S_2， S_1 和 S_0， 利用那些表达式，可以把方程变成

$$(n+1)^4-1=4S_3+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$+4\frac{n(n+1)}{2}+n$$

在这个方程里，除 S_3 外，其余的都是用 n 表示的， 下面只要作些代数运算便可确定出 S_3：

$$4S_3=(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)$$

$$= (n+1)[n^3+3n^2+3n-2n-n(2n+1)]$$

$$S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

至此，我们不仅达到了预期的结果，而且可看出作法本身也是有意义的：这一手法用上两次以后，我们也许就能预见到一个一般的轮廓。请记住一位著名教育家的名言："所谓方法，就是用过两次的手法。"[2]

§3.4 递归

上节里的作法的突出特点是什么呢？为了得到S_3，我们要倒回到S_2，S_1和S_0。这一点使我们一下认清了§3.2的"戏法"，在那里，我们由已得出的S_1和S_0，递推出了S_2。

实际上，我们也可以用同一办法导出S_1来（在§3.1里，我们是用另一方法得到它的）。从下面这个最熟悉的公式

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

可得

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

把$n=1$，2，3，…，n的情形都写出来：

$$2^2-1^2=2\cdot1+1$$

$$3^2-2^2=2\cdot2+1$$

$$4^2-3^2=2\cdot3+1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

然后把它们加起来便得

$$(n+1)^2-1=2S_1+S_0$$

2）参看HSI，p.208。

而$S_0=n$，故

$$S_1=\frac{(n+1)^2-1-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

这就是 §3.1 最后的结果。

当如上格式对特殊情形 $k=1$，2 和 3 都获得成效以后，我们当然要毫不犹豫地把它用于一般的和数 S_k。现在应该用指数为 $k+1$ 的二项式公式：

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=(k+1)n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

把各个特殊情形都写出来：

$$2^{k+1}-1^{k+1}=(k+1)\,1^k+\binom{k+1}{2}1^{k-1}+\cdots+1$$

$$3^{k+1}-2^{k+1}=(k+1)\,2^k+\binom{k+1}{2}2^{k-1}+\cdots+1$$

$$4^{k+1}-3^{k+1}=(k+1)\,3^k+\binom{k+1}{2}3^{k-1}+\cdots+1$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k-1}=(k+1)n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

再加在一起，便得

$$(n+1)^{k+1}-1=(k+1)S_k+\binom{k+1}{2}s_{k-1}+\cdots+s_0$$

倘若我们已经知道了s_{k-1}，s_{k-2}，…，s_1 和 s_0，那末由这个

方程便可以把 S_k 确定出来（用 n 表示）。例如，由前面所得到的S_0，S_1，S_2，和S_3 的表达式，可以直接通过代数运算导出S_4 的表达式。有了S_4，进一步又可以得出S_5，这样一直下去，我们便可以计算任意的S_k[3]。

这样，从§3.2 里那个"突如其来"的证明（变"戏法"）出发，最终形成了一个模型。为了进一步应用它，我们值得把它总结一下并将它牢牢记住。对于一个依次排列起来的序列（例如S_0,S_1,S_2,S_3,…,S_k,…），我们可以去算它当中的任一项的值，每次算一个。为此，需要有两个先决条件：

首先，应当知道序列的第一项(S_0是显然可以算出来的)。

其次，应该有某个关系式将序列的一般项与它前面的那些项联系起来（例如本节中的S_k与S_0，S_1,S_2,…,S_{k-1}由上面最后那个方程联系起来，这个联系在 §3.2 中的"戏法"中就已预示了）。

这样我们便可以藉助于前面的项，一个接一个依次地、递推地把所有的项都找出来。这就是重要的递归模型。

§3.5 符咒 (*abracadabra*)

符咒这个字有点"紊乱的胡话"的意思。今天我们是把它当作贬意词来用的。但是曾经有过一个时期，它是一个很有魔力的字眼。符咒用某种神秘的形式（某些方面有点象图3.2），雕刻在护身符上，人们相信，佩戴了这种护身符，就可以不受疾病或恶运的侵袭。

---

3)这一方法是巴斯卡（Pascal）提出的，见 L.Brunschvicg 和 P. Boutroux 编辑的《布来西·巴斯卡全集》（Œuvres de Blaise Pascal）第三卷。pp. 341—367。

A

B B

R R R

A A A A

C C C C C

A A A A A A

D D D D D

A A A A

B B B

R R

A

图3.2 魔字

你能用几种方法从图3.2里读出符咒——*abracadabra*这个字？这里所谓“读”意思是说，我们从最顶上（北极）的*A*开始，按字母（向东南或向西南）逐个朝下念，直至达到最下面（南极）的*A*为止。

这个问题似乎稀奇，可是如果你留意到这里边藏着点你熟悉的东西，那么你的兴趣就会被引起来。我们想象在一个城里散步或乘车兜风，假定这个城市是由一些方方正正的街区组成的，其中有一半的街道是从西北通向东南，而另一半的街道是由东北通向西南，两者十字交叉。读图3.2里那个魔字相当于在这种街道网络里走一条锯齿状道路。当你沿着图3.3所示的那条锯齿状道路向前走时，从开始那个*A*到末尾那个*A*，经过十个街段。在这个街道网络里，当然还有一些别的、也有十个街段那么长的、介于这两个端点之间的道路，但是比它更短的道路是不会有的。在网络里，找出介于给

定的两个端点之间的不同的最短道路的数目——这就是我们所说的那个藏在图 3.2 关于魔字的怪问题后面的有趣的问题。

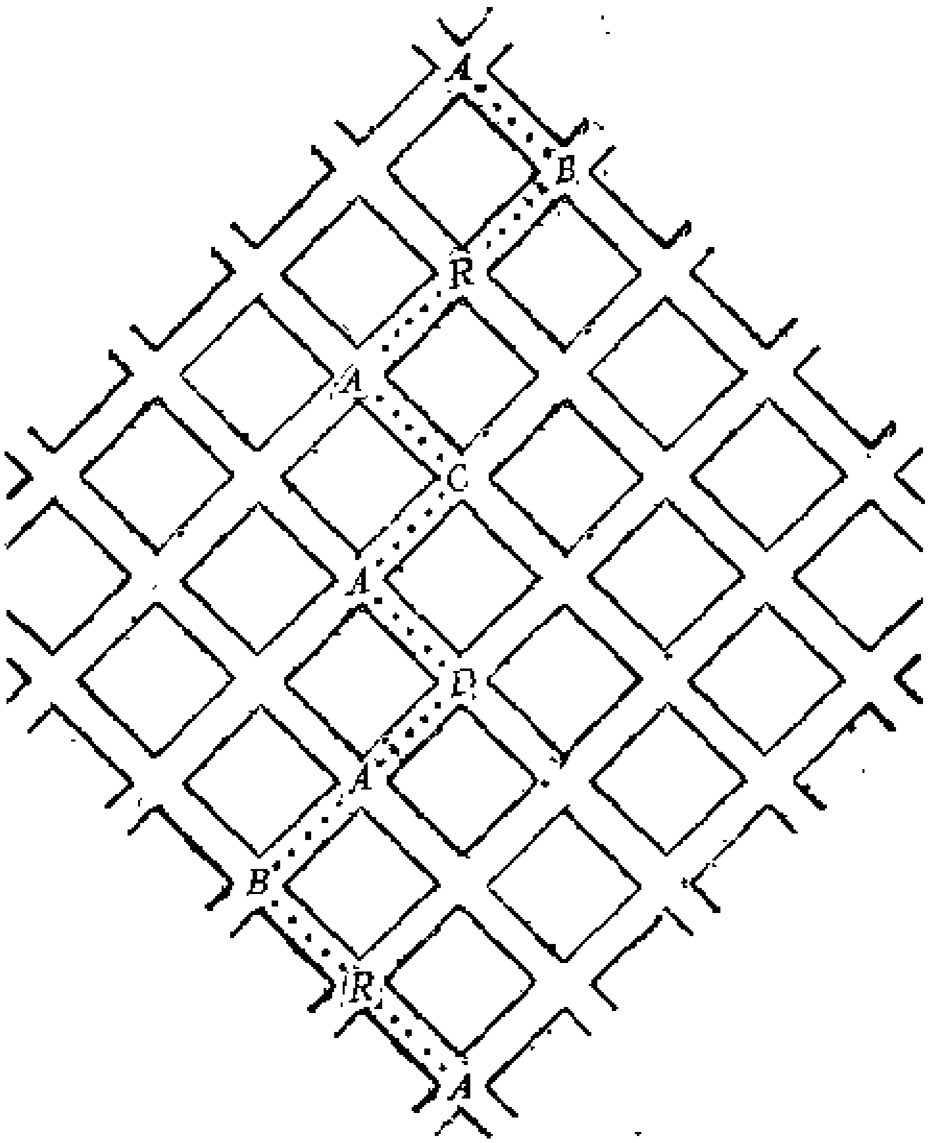


图3.3　锯齿状道路是最短的

对问题进行一般的论述也许有不少好处。有的时候它甚至能提供出一个解法来，我们现在碰到的情况就正是这样。如果你不能解图 3.2 所提的那个问题（你大概不能），那么先去解一个与此有关的简单问题吧。从这点上讲，一般的论述也许能对我们有所帮助：因为我们可以先选它的较简单

的情形去讨论。实际上，如果给定的那两个点在网络里彼此靠得很近（比起图 3.3 那两个 A 来说要更近些），则要数出它们之间的不同锯齿状道路就很容易，你只要一根根地去画，然后综合起来就行了。现在照这个办法从 A 开始，一步步做下去。首先考虑那些从 A 走一个街段就可以达到的点，然后是那些走两个街段可以达到的点，以后是走三个、四个以至于更多的街段才可以达到的点。对每一个这种点都综合并数出它与 A 相连的最短锯齿状道路。图3.4里我们标上了这样算出的一些数字（但你应该自己去算这些数字，并且多算几个——起码要把它们验算一下）。观察一下这些数字——你能看出点什么吗？

在你充分了解上述这些以后，你是能看出一些名堂来的。即使你以前没有见过标在图 3.4 里那张数字表，你也会注意到一个有意思的关系：图 3.4 里，任何一个不等于 1 的数都是表中另两个数的和，

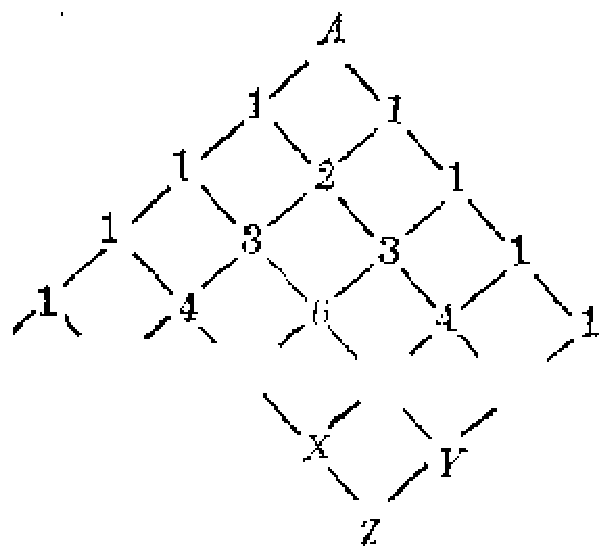


图3.4　算一下最短锯齿状道路的数目

一个是它西北的紧邻，另一个是它东北的紧邻，例如

$$4 = 1 + 3, \qquad 6 = 3 + 3$$

如果你象生物学家通过观察发现生物规律那样去仔细地观察，你就会找到这一规律了。而在找到这个规律以后，你应该自问一下，为什么会是这样呢？这是什么道理？

道理十分简单。在你的网络里，考虑三个街角点X、Y

和Z，它们的相互位置如图 3.4 所示。X是Z 的西北紧邻，Y是Z 的东北紧邻，如果我们希望在网络里沿一条最短的道路从 A 到达Z，就必须或者经过X，或者经过Y，一旦到了 X，再进一步到Z 便只有一条路，同样，一旦到了 Y，进一步再到Z 也只有一条路。所以从 A 到 Z 最短道路的总数是两部分的和：它等于从 A 到 X 最短道路的数目加上从 A 到 Y 最短道路的数目。这就是观察结果的解释，同时也证明了前面所讲的那个一般规律。

搞清楚这一基本点之后，我们就可以用简单的加法延拓图 3.4 里的数字表，直到得出图 3.5 那张大的数字表为止，于是最南面角上的那个数字就是所要的答案：我们恰好有252种不同的方法去读图 3.2 里那个魔字。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
6 15 20 15 6
21 35 35 21
56 70 56
126 126
252

图 3.5 由三角形得到的正方形

§3.6 巴斯卡（Pascal）三角形*）

读者现在已经认识了我们在上一节得到的那些数字和它们独特的结构。图 3.4 里的数称为*二项式系数*，而它们的三角形排列通常称为*巴斯卡三角形*（巴斯卡本人把它叫做“算术三角形”）。在图 3.4 里，还可以进一步添上一些线，事实上，它可以无限延伸下去。图 3.5 的表是从这个大三角形里切下来的一块正方形。

实际上，某些二项式系数和它们的三角形排列在巴斯卡的《算术三角形》论文出现以前，就已经在其他作者的著作里出现过。不过，巴斯卡在这方面的贡献仍丝毫无愧于用他的名字去命名。

（1）我们应当引进一个适当的符号去表示巴斯卡三角形里的数，这也是重要的。在三角形每一点上对应的那个数都是有几何意义的，它表示从顶点到该点不同的最短锯齿状道路的数目。每一条这样的道路都经过同样数目的街段，比如说，n 个街段。而在所有这些道路里，西南方向走向的街段的数目和东南方向走向的街段数目的和都是一样的，用 l 和 r 分别去表示上述两种不同走向街段数（l 指向左下方，而 r 指向右下方），则显然

$$n=l+r$$

这说明 n，l 和 r 这三个数中任给两个，第三个就完全确定，于是它们涉及的那个点也就完全确定了（事实上，如果以巴

*）在法国数学家 B·巴斯卡（1623—1662）1654 年发明这个三角形 600 多年以前，我国宋朝的贾宪就已经在《黄帝九章算法细草》一书中提到它了，这是一个指数为正整数的二项式定理系数表。

斯卡三角形的顶点为原点，建立直角坐标系，一条轴 l 指向西南，另一条轴 r 指向东南，那么 l 和 r 刚好就是那个点的坐标）。例如，对于图 3.3 里的那条道路，最下面的点 A 有

$$l=5, \quad r=5, \quad n=10$$

而对于同一条道路的第二个 B 点，则有

$$l=5, \quad r=3, \quad n=8$$

我们将用符号 $\binom{n}{r}$（它是由欧拉引进的）表示从巴斯卡三角形顶点出发，到达由 n（道路经过的街段总数）和 r（沿右下方的街段数）决定的那个点的不同最短锯齿状道路的数目。例如，在图 3.5 中，

$$\binom{8}{3}=56, \quad \binom{10}{5}=252$$

把图 3.4 的数字用符号去表示，便得图 3.6 。在图中，上数相同（即同一个 n）的符号列成一条水平线（第 n 条"基线"——一个直角三角形的底），下数相同（即同一个 r）的符号列成一条斜线（第 r 条道*)）。图 3.5 中，第五条道是正方形的一条边，其对边是第 0 条道（如果你愿意的话，可以把它们叫做边界线，或沿河大道），第四条基线则可从图 3.4 中见到。

---

*）我们把西南走向的街道称为"道"（avenue），而把东南走向的街道称为"街"（street）。

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\cdots \\
\binom{n}{r-1} \quad \binom{n}{r} \\
\binom{n+1}{r}
\end{array}
$$

图3.6 符号的巴斯卡三角形

（2）除了几何上的特征外，巴斯卡三角形还有它计算方面的特征。边界（第0条街和第0条道以及它们共同的出发点）上所有的数都等于1（因为显然从出发点到这些街角只有一条最短的道路），所以

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

我们很自然地称这个关系为巴斯卡三角形的边界条件。

而巴斯卡三角形内的任一数一定在某一水平基线上，假设它是在第$n+1$条基线上，我们就返回（或递归）到第n条基线上与它紧邻的两个数，用这两个数去计算它（见图3.6）：

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

很自然的，我们把这个方程称为巴斯卡三角形的递归公式。

这样，从计算的角度来看问题，$\binom{n}{r}$可以认为是被巴斯卡三角形的递归公式和边界条件所确定的（这也可以作为它的定义）。

§3.7 数学归纳法

用递归公式计算巴斯卡三角形里某一个数时，必须藉助它前面那条基线上的两个数。我们当然希望找到一个不依赖于以前的数的独立的计算公式。下面是大家熟悉的二项式系数的显公式：

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

它跟巴斯卡三角形里的其他数无关。巴斯卡的论文里有这个公式（不过它不是以我们现在这种形式出现，而是用文字表达的）。巴斯卡没有说他是怎样发现这个公式的，我们这里也不打算过多地去推测（也许他起初也是猜出来的——我们常常是靠观察，然后再进行推测去发现事物的。参看习题3.39解法的附注）。可是巴斯卡给了显公式一个漂亮的证明，我们这里将把整个注意力集中在他的证明方法上[4]。

我们预先须作一点说明，显公式从其表示形式来看不能用于$r=0$的情形。为此我们规定，当$r=0$时，令

$$\binom{n}{0}=1$$

---

4)见注3）里的《巴斯卡全集》，pp.455—464，特别是pp.456-457，下面的叙述只是用了近代的符号，而很少改变巴斯卡原文的内容。

另一方面，当 $r=n$ 时，因为

$$\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots(n-1)n}=1$$

即

$$\binom{n}{n}=1$$

所以公式对 $r=n$ 成立。于是我们只要对 $0<r<n$ 的情形证明显公式即可，也就是说对巴斯卡三角形内部那些数去证明，而对这些内部的数是可以用递归公式的。下面就引出巴斯卡的证明，我们只作了某些非本质的改动，而这种改动将注在方括号〔　〕里。

虽然这个命题〔即显公式〕包含无穷多种情形，我在两个引理的基础上，就可以给出它的一个极简单的证明。

引理1断言命题对第一条基线是对的，这是显然的。〔显公式对 $n=1$ 成立，因为在这种情形下，r 可能取的值只有 $r=0$ 和 $r=1$ 这两个，而这在前面的说明里已经讲了。〕

引理2断言：如果命题对某一条基线〔对某一个 n〕成立，那末它对下一条基线〔对 $n+1$〕也一定成立。

这样，命题就对一切 n 都成立，因为由引理1，它对 $n=1$ 成立，于是根据引理2，它对 $n=2$ 就成立，同样道理，对 $n=3$ 也成立，这样无限地下去。

于是只要证明引理2就行了。

按照引理2的叙述，我们假定显公式对第 n 条基线成立，也就是说对这个 n 和一切 $r=0,1,2,\cdots,n$ 都有

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)\cdot r}$$

特别的，当 $r\geqslant 1$ 时，有

$$\binom{n}{r-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}$$

把这两个方程加起来，再利用递归公式，便得

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r}+1\right]$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\cdot\frac{(n+1)}{r}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots[(n+1)-r+1]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

于是，由显公式对某个n成立便推出它对 $n+1$ 也成立，这样我们就证明了引理 2 的结论。

上面引的巴斯卡的这些话有重要的历史意义，因为他的证明是数学归纳法——一个基本的推理模型——的头一个例子。

这个推理模型需要深入学习[5]，因为如果不求甚解马虎地去引用，数学归纳法是会把一些初学者弄糊涂的，它也可能变成一个惑人的“戏法”。

谁都知道跟魔鬼打交道是很危险的，如果你给他一个小指头，他就会吞噬掉整个手。巴斯卡的引理 2 干的恰好就是这种事。引理 1 成立，你只给了一个指头（$n=1$ 的情形），而引理 2 马上就拿走你的第二个手指（$n=2$ 的情形），随着又拿走第三个手指（$n=3$），以后又是第四个，这样下去，最后就拿走了所有的手指头，那怕你有无穷多个手指头，也全部要给拿光。

5）见HSI，引论和数学归纳法，pp.114—121；MPR，卷Ⅰ，pp.108—120。

§3.8 继续前进

学完前面三节以后，我们就有了三种不同的方法去引出巴斯卡三角形里的数——二项式系数。

（1）几何方法　　二项式系数是街道网络里介于两个给定街角间的最短锯齿状道路的数目。

（2）计算方法　　二项式系数可以由递归公式和边界条件确定。

（3）显公式　　即 §3.7里用巴斯卡方法证明的那个公式。

二项式系数这个名字提醒我们还有另一个方法：

（4）二项式定理　对变量x和任何非负整数n，都有恒等式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

证明见习题3.1。

我们还可以用别的方法引进巴斯卡三角形里的这些数，因为在很多有趣的问题里它们都起着重要的作用，并且具有很多有趣的性质。雅各·贝努里*）在他的《猜度术》（"Arc Conjectandi"，巴塞尔 1713，第二部分，第三章，p.88）一书中写道"这张数字表具有一系列奇妙的性质。刚才我们已经看到了，组合论的本质就蕴含在它里面（见习题3.22—3.27）。比较熟悉几何的人还知道，它还隐藏着数学里一些重要的诀窍。"当然时代不同了，很多在贝努里时代还未发掘的事情，今天已经都搞清楚了。不过，对那些希望作一些有趣而又有

---

*）雅各·贝努里（Jacob Bernoulli 1654—1705）瑞士巴塞尔的数学家，是数学史上著明的贝努里家族第一个成员。《猜度术》是一本讨论概率论的书，1713年在他死后才出版。

意义的习题的读者来说，这仍是一个很好的锻炼机会：他可以通过仔细观察巴斯卡三角形里的数，并用这种或那种或同时用几种方法去研究它们，而发现许多东西，其中有些还可能是很有用的。

顺便说一句，本章前四节我们指出了求前 n 个正整数某个方幂的和的问题。后来，又接触到两个重要的一般模型（递归和数学归纳法），当然，为了彻底理解和掌握这两个模型，还需要继续运用它们去处理更多的例子。因此在我们的面前还有不少的工作需要去做。

§3.9 观察，推广，证明，再证明

让我们再回到原来的出发点，并用另一种观点来考虑问题。

（1）我们是从图3.2和图3.3那个魔字开始的，或者说是从那个魔字问题开始的。未知量是什么呢？未知量就是街道网络里从第一个A到最后一个A（即从方块的最北角到最南角）的最短锯齿状道路的数目。这样的每一条锯齿状道路一定要在某一个地方穿过正方形的水平对角线。沿着这条水平对角线，有六个可能的交叉点（即街角A），于是我们就可以根据经过不同交叉点而把所有锯齿状道路分成六类，那末每一类里又有多少条道路呢？这就提出了一个新问题。

我们具体考虑水平对角线上的一个交叉点，例如从左边数过来的第三个（按§3.6的符号，即$l=3$，$r=2$，$n=5$的那个点）。任何一条过这个交叉点的锯齿状道路都是由两段组成的，上半段是从正方形的北角开始，到选定的这个点为止，下半段则从所选的点开始，到正方形的南角为止（图3.3）。

我们前面已经看到（图 3.5）不同的上半段道路的数目是

$$\binom{5}{2}=10$$

而不同的下半段道路的数目也是这么多(为什么?)。因为任一个上半段和任一个下半段拼在一起都是一条完整的道路〔由图3.7(Ⅱ)所示〕，所以这种道路的数目等于

$$\binom{5}{2}^2=100$$

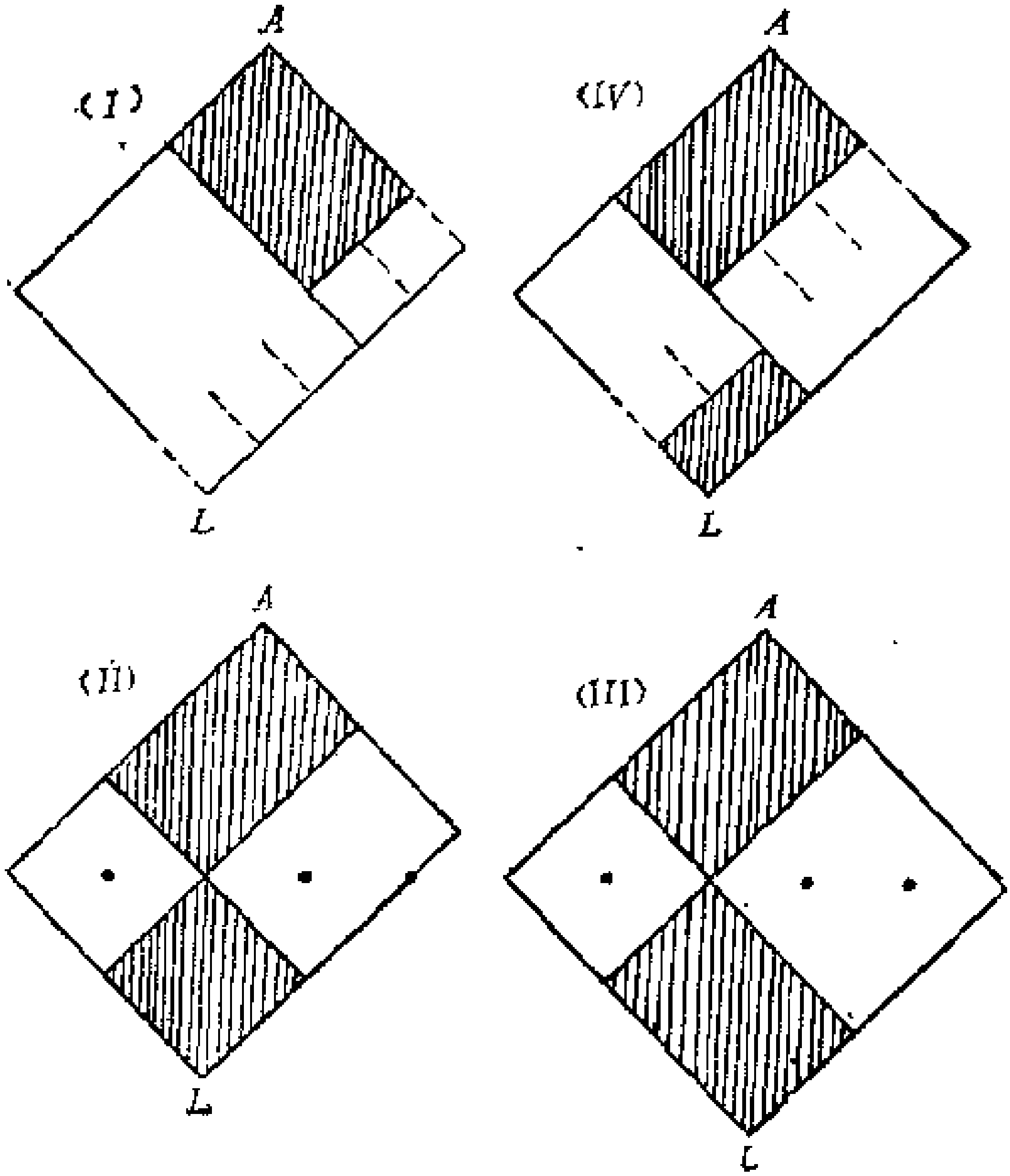


图 3.7 提示

当然，与水平对角线交于其他点的锯齿状道路的数目也可以用同样的方法去计算，于是我们又找到了原来问题的一个新解法：我们恰好有

$$1+25+100+100+25+1$$

种不同的方法去读图 3.2 里那个魔字。这些数的和跟我们在§3.5末尾得出的那个数一样，都等于252。

(2) 推广　　图 3.3 所考虑的那个正方形的一条边只包含 5 个街段。推而广之（由 5 过度到n），我们有

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

这就是说，“巴斯卡三角形中第 n 条基线上的数的平方和等于第$2n$条基线当中的那个数”。实际上，我们在(1)中作的推理已经证明了这个一般命题。虽然我们仅仅讨论了 $n=5$ 的特殊情形（我们甚至只考虑了第五条基线上一个特殊点），但是当我们这样作时，并没有用到它的特殊性，因此上述推理并不失一般性。不过读者可以当作一个有用的练习去重复一下上面的推理，由特殊变成一般，即用n替换前面的 5 [6]。

(3)另一种方法　　不过这个结果还是来得有点突然，如果我们还能从别的角度证明它，那我们对它就会理解得更好了。

综观 §3.8 里列举的各种方法，我们试着把这个结果与二项式公式联系起来。实际上，它们的联系可通过下式表现出来：

---

6) 这是一个有代表性的特殊情形。见MPR，卷Ⅰ，p.25，习题10。

$$(1+x)^{2n}=\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots$$

$$=(1+x)^n(1+x)^n$$

$$=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\cdot$$

$$\left[\binom{n}{n}+\cdots+\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{0}x^n\right]$$

我们集中来考虑x^n的系数，右边第一行x^n的系数就是(2)中那个方程（我们正在找它的第二个证明）的右端，现在再看后两行里两个因子的乘积，这里对后一个因子利用了二项式系数的对称性：

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

在这个乘积里，x^n的系数显然就是(2)里我们要去证明的那个方程的左端。因为这些是x的恒等式，两边x^n的系数应该相等，故得证。

第三章的习题与评注

第一部分

这一部分是关于前四节的习题与评注。

3.1 证明在§3.8(4)里叙述(并用于§3.4)的二项式定理(利用数学归纳法。§3.8提到的前三个方法中,哪一个同现在这个问题最相当?)。

3.2 等价于一般情形的一个特殊情形。由§3.8(4)给出并在习题3.1中证明的那个恒等式只是下述恒等式

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

的一个特殊情形($a=1,b=x$),证明反过来那个特殊情形也可以推出这个更为一般的恒等式[7]。

3.3 在本章前三节里,我们计算了S_k(其定义见§3.3)当$k=1,2,3$的情形,$k=0$的情形是显然的。比较这些表达式,我们便可导至一般的定理:S_k是n的$k+1$阶多项式,其最高阶项的系数是

$$\frac{1}{k+1}$$

定理的结论

$$S_k=\frac{n^{k-1}}{k+1}+\cdots$$

---

7)这种特殊与一般的等价性常使哲学家和初学者困惑不解。其实,在数学里却是很常见的。参考MPR,卷Ⅰ,p.23习题3和4。

（略写部分是n的一些低阶项）在历史上对积分的计算曾起过重要作用。

试用数学归纳法证明此定理。

3.4 我们可以藉助于对某些小的自然数n计算出比值

$\frac{S_4}{S_2}$，而猜得S_4的一个表达式。实际上，对

$$n=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5$$

有
$$\frac{S_4}{S_2}=1,\quad \frac{17}{5},\quad 7,\quad \frac{59}{5},\quad \frac{89}{5}$$

为一致起见，把它们写成

$$\frac{5}{5},\quad \frac{17}{5},\quad \frac{35}{5},\quad \frac{59}{5},\quad \frac{89}{5}$$

分子都接近6的倍数，实际上它们可写成

$$6\cdot1-1,6\cdot3-1,6\cdot6-1,6\cdot10-1,6\cdot15-1$$

请注意数（你应当能认出它们）

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15$$

如果你能成功地作出S_4的一个表达式，那么就（独立于§3.4的方法）试用数学归纳法去证明它[8]。

3.5 再用§3.4里指出的方法（而不依赖于习题3.4）去计算S_4。

3.6 证明

---

8) MPR卷I，pp·108—110对一个与此类似但较为简单的情形进行了讨论。

$$n = S_0$$
$$n^2 = 2S_1 - S_0$$
$$n^3 = 3S_2 - 3S_1 + S_0$$
$$n^4 = 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0$$

以及一般的公式

$$n^k = \binom{k}{1}S_{k-1} - \binom{k}{2}S_{k-2} + \binom{k}{3}S_{k-3} - \cdots +$$
$$+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}S_0$$

(它跟§3.4里的主要公式很相象，但两者并不相同。

3.7 证明

$$S_1 = S_1$$
$$2S_1^2 = 2S_3$$
$$4S_1^3 = 3S_5 + S_3$$
$$8S_1^4 = 4S_7 + 4S_5$$

以及它的一般公式

$$2^{k-1}S_1^k = \binom{k}{1}S_{2k-1} + \binom{k}{3}S_{2k-3} + \binom{k}{5}S_{2k-5} + \cdots$$

其中$k=1$，2，3，…。按照k为奇数或偶数，右端最后一项分别为S_k或kS_{k+1}。

(它跟习题3.6很相象，因为我们可以把n^k写成S_0^k。)

3.8 证明

$$3S_2 = 3S_2$$
$$6S_2S_1 = 5S_4 + S_2$$
$$12S_2S_1^2 = 7S_6 + 5S_4$$
$$24S_2S_1^3 = 9S_8 + 14S_6 + S_4$$

以及一般的公式

$$3\cdot 2^{k-1}S_2S_1^{k-1}=\left[\binom{k}{0}+2\binom{k}{1}\right]S_{2k}+\left[\binom{k}{2}+2\binom{k}{3}\right]S_{2k-2}+\cdots$$

其中$k=1$，2，3，…。按照k为奇数或偶数，右端最后一项分别为$(k+2)S_{k+1}$或S_k。

3.9 证明

$$S_3=S_1^2$$
$$S_5=S_1^2(4S_1-1)/3$$
$$S_7=S_1^2(6S_1^2-4S_1+1)/3$$

以及一般的，S_{2k-1}是$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$的k阶多项式，当$2k-1\geqslant 3$时，S_{2k-1}可以被S_1^2整除（这就推广了§3.3的结果）。

3.10 证明

$$S_4=S_2(6S_1-1)/5$$
$$S_6=S_2(12S_1^2-6S_1+1)/7$$
$$S_8=S_2(40S_1^3-40S_1^2+18S_1-3)/15$$

以及一般的，$\frac{S_{2k}}{S_2}$是S_1的阶k-1多项式(这就推广了习题3.4解法中出现的一个结果)。

3.11 我们引进如下符号

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=S_k(n)$$

它要比§3.3里采用的符号更明确(或更具体)些，这里k是非负整数，n是正整数。

我们把n的取值范围(不是k的范围)推广：令$S_k(x)$表示x的$k+1$阶多项式，当$x=1,2,3,\cdots$等自然数时，它就等于$S_k(n)$。

例如
$$S_3(x)=\frac{x^2(x+1)^2}{4}$$
证明当$k\leqslant 1$(注意，$k\neq 0$)时，有
$$S_k(-x-1)=(-1)^{k-1}S_k(x)$$

3.12 用尽可能多的方法求前n个奇数
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
的和。

3.13 求$1+9+25+\cdots+(2n-1)^2$。

3.14 求$1+27+125+\cdots+(2n-1)^3$。

3.15 (续)推广。

3.16 求$2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2$。

3.17 (续)推广。

3.18 求$1\cdot 2+(1+2)\cdot 3+(1+2+3)4+\cdots+[1+2+\cdots+(n-1)]n$的简单表达式(应设法用前面讲过的某些内容，最有希望用上的是什么？是方法呢还是结果？)。

3.19考虑$\frac{n(n-1)}{2}$个差：

$2-1$

$3-1, 3-2$

$4-1, 4-2, 4-3$

……………

$n-1, n-2, n-3, \cdots\cdots, n-(n-1)$

求：(*a*)它们的和，(*b*)它们的积，(*c*)它们的平方和。

3.20 $E_1, E_2, E_3, \cdots$由恒等式
$$x^n-E_1x^{n-1}+E_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nE^n=(x-1)(x-2)$$
$(x-3)\cdots(x-n)$确定。证明

$$E_1=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$E_2=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

$$E_3=\frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{48}$$

$$E_4=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}$$

并证明一般的，E_k[由于它依赖 n，所以最好记为 $E_k(n)$] 是 n 的 $2k$阶多项式。

[最好利用高等代数的有关命题，因为 E_k 是前 n 个正整数的k阶初等对称多项式，而它们k次幂的和就是$E_k=E_k(n)$。验证$E_k(k)=k!$。]

3.21 数学归纳法的两种形式。可以用数学归纳法证明的命题A，典型的情况是它包含有无穷多个分命题$A_1A_2,\cdots$，$A_n,\cdots$。事实上，命题A跟"$A_1,A_2,A_3,\cdots$，同时成立"这个命题等价。例如，如果A表示二项式定理，而A_n表示恒等式（见习题3.1）

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots\binom{n}{n}x^n$$

成立。则二项式定理说，此恒等式对$n=1$，2，3，4，…都成立。亦即所有A_n同时成立。

对一串命题$A_1,A_2,A_3,\cdots$考虑下面三句话：

（Ⅰ）命题A_1成立。

（Ⅱ$_c$）由命题A_n成立，可推出命题A_{n+1}成立。

（Ⅱ$_d$）由命题A_1，A_2，A_3，…，A_{n-1}和A_n都成立可推出命题 A_{n+1}成立。

现在我们便能区分下述两种数学归纳法。

(a)由(Ⅰ)和(Ⅱ$_a$)可得命题A_n对一切$n=1, 2, 3, \cdots$都成立；在§3.7里，我们按巴斯卡的论证法得出了这一结论。

(b)由(Ⅰ)和(Ⅱ$_b$)也可得命题A_n对一切$n=1, 2, 3, \cdots$都成立；在习题3.3的解法里，我们就是这样用的。

你也许感到方法(a)和(b)之间的差别主要是形式上而不是本质上的，你能把这一感觉具体写出来并给它一个清晰的论证吗？

第二部分

3.22 十个男孩——柏尼、(Bernie)，瑞奇(Ricky)、亚伯(Abe)、查理(charlie)、艾尔(Al)、狄克(Dick)、艾勒克斯(Alex)、比尔(Bill)、罗埃(Roy)和亚太(Artie)——一同去野营，傍晚时，他们分成两队，每队五人，一队支帐篷，另一队做晚饭。问不同的分法有几种？（魔字能帮你的忙吗？）

3.23 证明n个元素组成的集合有$\binom{n}{r}$个不同的含r个元素的子集〔或者按传统术语说：在n个元素中每次取r个元素的组合数是$\binom{n}{r}$〕。

3.24 平面上按"一般位置"给定n个点，意即任意三点均不共线。则联结任意两给定点的直线可以作出多少条？顶点选自给定点的三角形可以作出多少个？

3.25 (续)叙述空间中类似的问题，并解之。

3.26 n边凸多边形有几条对角线？

3.27 求n边凸多边形对角线的交点数。这里只考虑多边形内部的交点，并假定多边形是"一般的"，即任意三条对角线都没有公共点。

3.28 多面体有六个面（我们考虑不正规的多面体，即它的任两个面都不合同），如果一个面涂红色，两个面涂蓝色，三个面涂棕色，问不同的涂法有多少？

3.29 多面体有 n 个面(任两个面都不合同)，其中 r 个涂以红色，s 个涂以蓝色，t 个涂以黄色。假定 $r+s+t=n$，问不同的涂法有多少？

3.30 (续)推广。

第三部分

在解下列某些题时，读者可以在几种方法中去考虑和选择[见§3.8；二项式系数的组合解释(参看习题 3.23)又提供了一种途径]。莱卜尼兹很强调从多方面解同一个问题的重要性。下面是他的一个看法(大意)："比较同一个量的两种不同表达式，便可以解出一个未知量来；而比较同一结果的两个不同的推导，便可以找到一个新的方法。"

3.31 用尽可能多的方法证明

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

3.32 考虑沿巴斯卡三角形一条基线上所有数的和：

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+1 &= 2 \\ 1+2+1 &= 4 \\ 1+3+3+1 &= 8 \end{aligned}$$

这些等式看来在预示一条一般的定理，你能猜出它吗？如果猜出来了，你能证明它吗？如果证明了，你还能给出其他的证法吗？

3.33 观察下列等式

$$1-1=0$$
$$1-2+1=0$$
$$1-3+3-1=0$$
$$1-4+6-4+1=0$$

推广，证明，再证明。

3.34 考虑巴斯卡三角形第三条道上前六个数的和

$$1+4+10+20+35+56=126$$

找出这个数字在巴斯卡三角形里的位置，试观察类似的事实、推广，证明，再证明。

3.35 把图3.5中那36个数字加起来，再找出和数在巴斯卡三角形中的位置。进一步提出一条一般的定理并证明它（求这么多数的和当然是个繁重的任务，但如果想得巧一些，你就很容易抓住要领）。

3.36 试在巴斯卡三角形里认出关系式

$$1\cdot1+5\cdot4+10\cdot6+10\cdot4+5\cdot1=126$$

中的那些数，记下它们的位置。观察（或记住）类似的情形，然后推广，证明，再证明。

3.37 试在巴斯卡三角形里认出关系式。

$$6\cdot1+5\cdot3+4\cdot6+3\cdot10+2\cdot15+1\cdot21=126$$

中的那些数，记下它们的位置，观察（或记住）类似的情形，然后推广，证明，再证明。

3.38 图3.8表示的是一个无穷图案序列的前四个，图案中的每一个都由等圆堆集成等边三角形的形状。任何一个不在图案边上的圆都与周围的六个圆相切。第n个图案的每一条边都是由n个圆排成的，第n个图案里圆的总数称为第n个三角形数。试用n表示第n个三角形数，并指出它在巴斯卡

三角形里的位置。

3.39 把图3.8里的圆换成球(弹子)，使得圆是它的赤

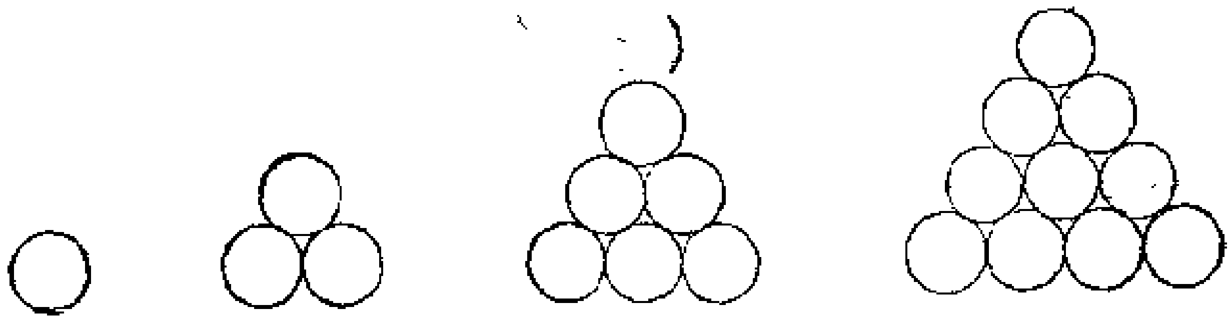


图3.8 前四个三角形数

道。先把10个弹子在水平面上排成图3.8里的形状，再把6个弹子放在它们上面(整齐地嵌在缝隙里)当作第二层，在它们上面又加3个弹子作为第三层，最后放一个弹子在顶上。这个

$$1+3+6+10=20$$

个弹子的结构跟正四面体的关系，就正象图3.8里圆堆成的图案跟等边三角形的关系一样，所以把20称为是第四个角锥数。试用 n 去表示第 n 个角锥数，并指出它在巴斯卡三角形里的位置。

3.40 你可以按另一种方式用弹子做一个角锥堆：第一层有 n^2 个弹子，排成图3.9里的正方形．第二层是 $(n-1)^2$ 个弹子，然后是 $(n-2)^2$ 个弹子，这样下去，最后只有一个弹子在最顶上，这个堆里有几个弹子？

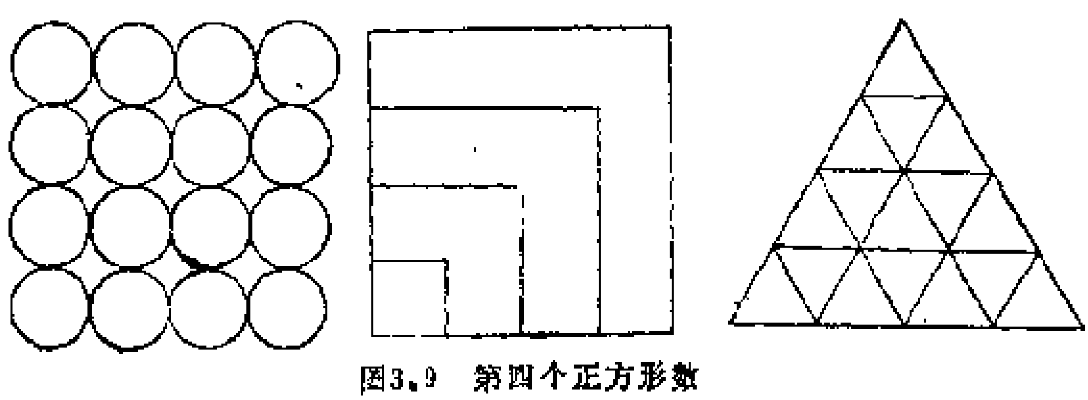


图3.9 第四个正方形数

3.41 试用街道网络里某一类锯齿状道路的数目去解释乘积

$$\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n_3}{r_3}\cdots\binom{n_k}{r_k}$$

3.42 从巴斯卡三角形的顶点到由数n(街段总数)和r(右下方向的街段数)确定的点的所有最短锯齿状道路，都与巴斯卡三角形的对称轴(即图3.3中从第一个A到最后那个A的联线)交于同一个公共点，即它们共同的出发点——顶点。在这些道路组成的集合中，考虑所有与对称轴再没有别的交点的道路组成的子集，求它们的数目N。

为了搞清楚问题的意思，考虑一些简单的特殊情形：

$$对 r=0, n, \frac{n}{2}(n偶数)$$

$$有 N=1, 1, 0$$

解法　只要考虑 $r>\frac{n}{2}$的情形就行了。这就是说，如果用对称轴去平分平面，则这些锯齿状道路公共的最低端点是在右半平面内。整个集合内有$\binom{n}{r}$条道路，我们把它分成三个互不相交的子集：

(1)即上面定义的那个子集，我们要找它的元素个数N。集合里不属于这个子集的道路除了A点外，跟对称轴还有别的交点。

(2)开始的第一街段是左下方向街段的道路。这种道路必然要在某个地方与对称轴相交，因为它的终点在另一个半平面内。这个子集里的道路数目显然是$\binom{n-1}{r}$。

(3)既不属于(1)又不属于(2)的那些道路。它们是从右下方的街段开始的，但随即在某处与对称轴相交。

证明子集(2)与子集(3)的元素个数相等（图3.10给出了在这两个子集间建立一一对应的关键性提示），由此推出

$$N=\frac{|2r-n|}{n}\binom{n}{r}$$

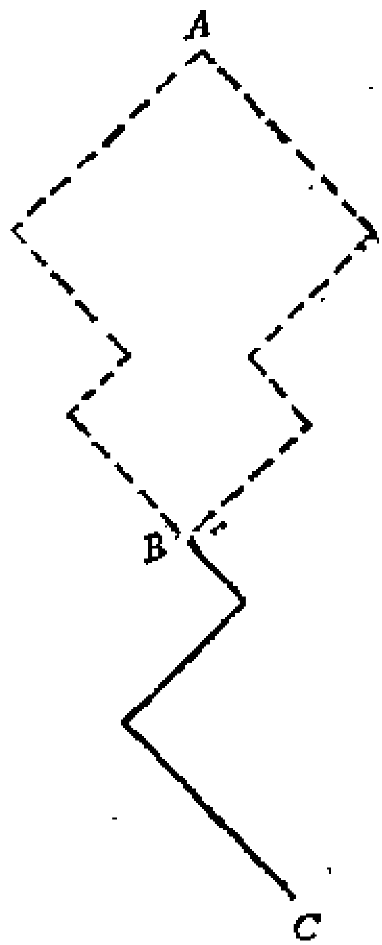


图3.10　关键性的提示

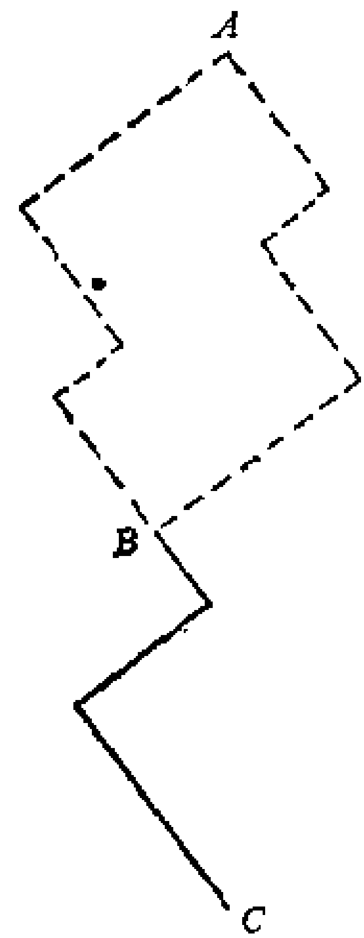


图3.11　关键性提示的另一形式

3.43 （续）证明从顶点到第n条基线且与对称轴仅仅交于顶点的最短锯齿状道路数目，当$n=2m$时，等于$\binom{2m}{m}$，而当$n=2m+1$时，则等于$2\binom{2m}{m}$。

3.44 三项式系数。图3.12是由下列两个条件确定的无限三角形数值表的一部分。

0　1　0

0　1　1　1　0

0　1　2　3　2　1　0

0　1　3　6　7　6　3　1　0

0　1　4　10　16　19　16　10　4　1　0

0　1　5　15　30　45　51　45　30　15　5　1　0

图3.12　三项式系数

(1)边界条件。每一条水平线或“基线”(在§3.6里也类似地用过这个词)都以0，1开始，以1，0告终。(第n条基线上有$2n+3$个数，因此，除了边界条件确定了这四个数以外，在第n条基线上还有$2n-1$数没有确定，这里的$n=1$，2，3，…。)

(2)递归公式。第$n+1$条基线上没有确定的数，都等于第n条基线上三个数——西北，正北和东北三个紧邻——的和，(例如，$45=10+16+19$)。

试求第七条基线上的数(其中除三个外，都可被7整除)。

3.45 (续)证明第n条基线上从1开始到1为止的数都是$(1+x+x^2)^n$的展开式中x方幂的系数(这就是“三项式系数”名称的由来)。

3.46 (续)试解释图3.12关于中心铅垂线的对称性。

3.47 (续)观察下列等式

$$1+1+1 \qquad = 3$$

$$1+2+3+2+1=9$$

$$1+3+6+7+6+3+1=27$$

试推广并证明。

3.48 (续)观察下列等式

$$1-1+1 \qquad = 1$$

$$1-2+3-2+1=1$$

$$1-3+6-7+6-3+1=1$$

试推广并证明。

3.49 (续)注意到和数

$$1^2+2^2+3^2+2^2+1^2=19$$

是一个三项式系数，试推广并证明。

3.50 (续)在图 3.12 中找出与巴斯卡三角形里数字完全相同的直线。

3.51 *莱卜尼兹调和三角形*。图 3.13 是一张不常见的奇妙的数表的一角。它具有的某些性质，可以说与巴斯卡三角形是“对比模拟”(analogous by contrast)的。巴斯卡三角形由整数组成，而莱卜尼兹调和三角形(所能看到的)是由整数的倒数组成的。在巴斯卡三角形里，每个数是它的西北紧邻和东北紧邻的和，而在莱卜尼兹三角形里，每个数是它的西南紧邻和东南紧邻的和，例如

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}$$

$$\frac{1}{8}$$

图3.13 莱卜尼兹调和三角形的片断

这就是莱卜尼兹三角形的递归公式。这个三角形也有一个边界条件：西北边界线(第 0 条道)上的数是依次的正整数的倒数：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…(巴斯卡三角形的边界条件情况不尽相同：它沿着整个边界——第 0 条道和第 0 条街——都给定了值)。由给定的边值出发，在巴斯卡三角形的情形，我们通过加法去得出其它的数，而在目前这种情形，我们是通过减法去得出其他的数。图3.13里那些空白，藉助递归公式立即便可补齐，例如

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5},\qquad\qquad \frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{56}$$

试利用边界条件和递归公式，把图3.13这张表延伸到整个第八条基线。

3.52 巴斯卡与莱卜尼兹。试找出两个三角形对应数之间的关系，并证明它。

*3.53证明[9]

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+\cdots$$

. . . . . .

（找出这些数在调和三角形里的位置。）

*3.54 求和数

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

并予以推广（你知道一个类似的问题吗？）

*3.55 求下列级数的和

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots(r-1)r}+\frac{1}{2\cdot3\cdots r(r+1)}+\frac{1}{3\cdot4\cdots(r+1)(r+2)}+\cdots$$

9）对于那些没有严格的无穷级数（极限，收敛，…）概念的读者，本题以及下面与它类似的某些题，其解法不要求准确的叙述。不过读者有了比较完整的知识以后，应当把准确的叙述（多数情形下是不难的）补起来。

第四部分

这一部分的某些题与习题3.61有关，另一些题与习题3.70有关。

*3.56 幂级数。数π的十进位小数表示3.14159…，实际上是一个“无穷级数”：

$$3+1\left(\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{1}{10}\right)^2+1\left(\frac{1}{10}\right)^3+5\left(\frac{1}{10}\right)^4+9\left(\frac{1}{10}\right)^5+\cdots$$

把$\frac{1}{10}$换成变量x，而把数字

$$3,\quad 1,\quad 4,\quad 1,\quad 5,\quad 9,\quad \cdots$$

分别换成常数系数

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad a_5,\quad \cdots$$

便得到一个幂级数

$$(1)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

我们在这里不准备考虑幂级数的收敛性及有关重要性质，只限于讨论这种级数的形式运算(见习题的3.53脚注)。乘幂级数以常数c，得

$$ca_0+ca_1x+ca_2x^2+ca_3x^3+\cdots$$

将幂级数(1)与另一幂级数

$$(2)\qquad b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$$

相加，得

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$$
$$+(a_3+b_3)x^3+\cdots$$

而两个幂级数(1)与(2)的乘积是

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\cdots$$

幂级数(1)与(2)相等，当且仅当

$$a_0 = b_0,\quad a_1 = b_1,\quad a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n, \cdots$$

我们把多项式也看成是一个幂级数，它有无穷多个系数为零，事实上，从某一项以后的系数都是零。例如，多项式$3x - x^3$可以看成是幂级数(1)的特殊情形，其中

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 3,\quad a_2 = 0,\quad a_3 = -1, \text{且当} n \geqslant 4 \text{时},$$
$$a_n = 0$$

请验证上述运算法则对多项式都成立。

*3.57 求乘积

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

*3.58 求乘积

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$

中x^n的系数。

*3.59 习题3.57解法里打开的缺口，也许可用来考虑级数

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$
$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$$
$$1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \cdots$$

你知道这些级数中某一个的和吗?你能找出其他级数的和吗?

*3.60 用另外的方法证明习题3.37的结果。

*3.61 分指数与负指数的二项式定理。牛顿1676年10月24日在给英国皇家协会秘书的一封信里，叙述了他是怎样发现(一般的)二项式定理的，他写这封信是为了回答莱卜尼兹对他的发现方法提出的询问[10]。牛顿考虑了某些曲线下的面

10)参看J. R. Newman的《数学世界》，卷1，pp.519—524。

积，他在瓦里斯（*Wallis*）关于插值思想的强烈影响下，最终得到了一个猜测：展开式

$$(1+x)^{a}=1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{2}+\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{3}+\cdots$$

不仅对正整数指数a成立，而且对分指数和负指数也都成立，事实上，对一切a的值都成立[11]。

牛顿对他的猜测并没有给出形式的证明，他宁肯靠例子和类比去说明它。我们可以说，他作为一个物理学家，是用“实验”和“归纳”去研究问题的。为了弄清他的观点，我们将重温牛顿做过的某些步骤，正是这些步骤使他确信这一猜测是可靠的。下面为了叙述简单起见，我们把这个猜测称为“猜测N”。

如果a是非负整数，则右边的级数里，x^{a+1}的系数为零，而所有后面那些系数也都等于零（由于分子里出现的因子零），于是级数是有限的。如果a的值不等于0，1，2，3，…，则级数不是有限的，而一直要到无穷。例如，对 $a=\frac{1}{2}$，经过仔细计算后的展开式为

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}x^{2}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}x^{3}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}-\frac{5}{128}x^{4}+\cdots$$

牛顿并没有因为出现无穷多非零项而感到烦恼不安，因

11）当然，今天我们知道对x是要有某些限制的，不过我们这里不去管它。这种忽略跟牛顿当时情况是一致的，因为当年还没有明确的级数收敛性的定义，而这样做也符合于脚注9）。

为他十分清楚幂级数和十进位小数之间的类比(见习题3.56，关于这一点，他在别的场合曾提到过)，某些十进位小数是有限的（如$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{5}$)。而另一些是无限的(如 $\frac{1}{3}$或$\frac{7}{11}$)。

上述$(1+x)^{\frac{1}{2}}$的级数成立吗?为了验证这一点，牛顿让级数自乘，结果应当是

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+x$$

为了验算这个等式，试计算级数乘积(习题3.56)里x，x^2，x^3和x^4的系数。

*3.62 计算级数

$$1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\cdots$$

平方的表达式中x，x^2，x^3和x^4的系数。此级数按猜测N乃是$(1+x)^{\frac{1}{3}}$的展开式，其平方应当是$(1+x)^{\frac{2}{3}}$的展开式，试予以验证。

*3.63 （续)计算上题给定级数三次方的表达式中x，x^2，x^3和x^4的系数。预测其结果，并验算你的预测。

*3.64 按猜测N展开$(1+x)^{-1}$，你有什么评论吗?

3.65 推广$\binom{n}{r}$的定义范围。在§3.6里，我们已经对非负整数n和r在满足不等式$r\leqslant n$的情形下定义了符号$\binom{n}{r}$，我们现在推广n(而不是r，参看习题3.11)的定义范围，我们令

$$\binom{x}{0}=1,\binom{x}{r}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}$$

其中x是任何数，$r=1,2,3,\cdots$。由这个定义可得

（Ⅰ）$\binom{x}{r}$是x的r阶多项式，$r=0,1,2,3,\cdots$。

（Ⅱ）$\binom{x}{r}=(-1)^r\binom{r-1-x}{r}$

（Ⅲ）如果n,r是非负整数，而$r>n$,则$\binom{n}{r}=0$。

（Ⅳ）猜测N可写成如下形式

$$(1+x)^a=\binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\cdots+\binom{a}{n}x^n+\cdots$$

（Ⅰ），（Ⅲ）和（Ⅳ）是显然的，证明（Ⅱ）。

*3.66 推广习题3.64：验算一下习题3.59的结果是否都符合猜测N。

*3.67 把我们已经用过三次（§3.9，习题 3.36 和习题 3.60）的那个方法再用一次：假定猜测N是对的，用两种不同的方法去计算展开式

$$(1+x)^a(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$$

中x^r的系数。

*3.68 试估计习题3.67的结果：它已被证明了吗？是它的某些部分被证明了吗？有其他的办法证明吗？如果我们承认了它，我们能证明猜测N吗？抑或能证明猜测N的有些部分？

*3.69 你能认出

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=1+2x+6x^2+20x^3+\cdots$$

中的系数是些什么吗？试把它的一般项系数用熟悉的形式（它应当体现系数都是整数这一事实）表示出来。

*3.70 *待定系数法*。把两个给定幂级数的商展成幂级数。

我们要把变量x的两个幂级数的商

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}$$

展成幂级数，这里系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, b_2, \cdots$是给定的数，假定$a_0 \neq 0$（虽然我们在开始的题目简短叙述里并没有提到这一假设，但它却是至关重要的）。

我们应当把给定的商表示成下列形式：

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots$$

系数$u_0, u_1, u_2, \cdots$只是引进来了，暂时还是不确定的(这就是为什么给这个方法起名叫待定系数法的原因)，不过我们希望最终能把它们定出来。事实上，确定它们就是本题的任务，所以系数$u_0, u_1, u_2, \cdots$是我们这个问题里的未知量(这里有无穷多个未知量)。

把这三个幂级数(其中两个给定，一个是要求的)之间的关系用下列形式重新写出来

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots)$$
$$=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

便发现情况变得比较熟悉了(习题.56)：由等式两边x同方幂的系数相等，便得到一个方程组：

$$\begin{aligned}
a_0u_0 &= b_0\\
a_1u_0+a_0u_1 &= b_1\\
a_2u_0+a_1u_1+a_0u_2 &= b_2\\
a_3u_0+a_2u_1+a_1u_2+a_0u_3 &= b_3\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

这个方程组属于一个我们所已熟悉的模型：它是递归的，也就是说，它可以用递归的方法解出来。从第一个方程里，

可以解出第一个未知量u_0，当我们解得$u_0, u_1, \cdots u_{n-2}$和u_{n-1}以后，由尚未用过的下一个方程便可以解出下一个未知量u_n。

试用$a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2$，和$b_3$去表示$u_0, u_1, u_2$和$u_3$。

（上面这个解法可以当作一个有用的模型。注意它的典型步骤是：

我们把幂级数的系数作为未知量；

比较幂级数关系式两边同一方幂的系数，从而导出方程组；

用递归方法去计算未知量。

这些步骤便刻划了“待定系数法”这个模型或方法。由它导出那些最重要最有用的方程组可以用递归方法解出。）

*3.71 考虑方幂的乘积

$$a_i^{\alpha_i} a_j^{\alpha_j} a_k^{\alpha_k} b_l^{\beta_l} b_m^{\beta_m}$$

定义

$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \beta_l + \beta_m$	是阶数，
$\alpha_i + \alpha \ + \alpha_k$	是a的阶数，
$\beta_l + \beta_m$	是b的阶数，
$i\alpha_i + j\alpha_j + k\alpha_k + l\beta_l + m\beta_m$	是权。

当然，上面的定义对任意多个a和b都可以用，并不一定非要三个a和两个b。

试观察在解习题3.70中得到的关于u_0，u_1，u_2和u_3的表达式，并说明观察到的规律性。

*3.72 试将商

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots + b_n x^n + \cdots}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots}$$

展开（结果很简单——你能用上它吗？）

*3.73 试将商

$$\frac{b_0-b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}{1-x}$$

展开(结果很简单——你能用上它吗？)

*3.74 试将商

$$\frac{1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{x^3}{105}+\cdots+\frac{x^n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}+\cdots}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}+\cdots}$$

展开(先算出前几项，然后试着去猜出一般项。)

*3.75 幂级数的逆。给定一个函数的幂级数，试求它的反函数的幂级数。

换句话说就是：给定x按y方幂的展开式，求y按x方幂的展开式。

更确切地说：给定

$$x=a_1y+a_2y^2+\cdots+a_ny^n+\cdots$$

假定$a_1\neq0$，求展开式

$$y=u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

按照习题3.70的模型，在给定x按y方幂的展开式中，以y的幂级数(要求的)代进去得：

$$\begin{aligned}x=a_1&(u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\cdots)\\&+a_2(u_1^2x^2+2u_1u_2x^3+\cdots)\\&\quad+a_3(u_1^3x^3+\cdots)\\&\qquad+\cdots\end{aligned}$$

我们让关系式两边x同方幂的系数相等，便得到u_1，u_2，u_3，…的一个方程组：

$$1=a_1u_1$$

$$0 = a_1 u_2 + a_2 u_1^2$$

$$0 = a_1 u_3 + 2a_2 u_1 u_2 + a_3 u_1^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样得到的方程组是递归的(虽然不是线性的)。

试用a_1，a_2，a_3，a_4和a_5去表示u_1，u_2，u_3，u_4和u_5。

*3.76 检验在解习题3.75中得到的表达式的阶数和权。

*3.77 给定

$$x = y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n + \cdots$$

试把y按x的方幂展开。(结果很简单——你能用上它吗？)

*3.78 给定

$$4x = 2y - 3y^2 + 4y^3 - 5y^4 + \cdots$$

试把y按x的方幂展开(试猜出一般项的形式，并予以说明。)

*3.79 给定

$$x = y + ay^2$$

试把y按x的方幂展开。(其结果可用来把习题3.75里考虑的一般情形叙述得更明确。)

*3.80 给定

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

试把y按x的方幂展开。

*3.81 微分方程。把满足微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

和初始条件

$$当x = 0时，y = 1$$

的函数y按x的方幂展开。

按照习题3.70的模型，我们令

$$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots$$

系数$u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots$是需要确定的。将$y$代入微分方程即得

$$u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + 4u_4 x^3 + \cdots$$
$$= u_0^2 + 2u_0 u_1 x + (2u_0 u_2 + u_1^2 + 1)x^2 + \cdots$$

比较关系式两边同方幂的系数，可得下列方程组。

$$u_1 = u_0^2$$
$$2u_2 = 2u_0 u_1$$
$$3u_3 = 2u_0 u_2 + u_1^2 + 1$$
$$4u_4 = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

因为由初始条件可得

$$u_0 = 1$$

所以由这个方程组，可用递归方法求出u_1，u_2，u_3，…。计算u_1、u_2，u_3和u_4的数值。

（象我们上面例示的那样，用待定系数法解微分方程，无论是在理论上还是在实践上都有很大的重要性。）

*3.82（续）证明当$n \geqslant 3$时，$u_n > 1$。

*3.83 把满足微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

和初始条件

$$当x = 0时，y = 1， \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

的函数y按x的方幂展开。

*3.84 求函数

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}$$
$$(1-x^{50})^{-1}$$
的幂级数展开式中x^{100}的系数。

这里为了解这个问题，我们先把问题略加拓广，然后找出方法去计算所考虑的展开式中的一般项x^n的系数。我们的步骤是逐步地先考虑一些蕴含于所提问题里的更为简单的类似的问题，具体地说，即引进若干个"待定系数"的幂级数。令

$$(1-x)^{-1}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$
$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots$$
$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots$$
$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}$$
$$=D_0+\ +D_1x+\cdots$$

最后

$$(1-x)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{15})^{-1}(1-x^{50})^{-1}$$
$$=E_0+E_1x+E_2x^2+\cdots+E_nx^n+\cdots$$

在这套符号下，我们的问题就是求E_{100}。现在引进了无穷多个新的未知量去代替原来的一个未知量E_{100}：我们要去找A_n，B_n，C_n，D_n和E_n，$n=0$，1，2，3，…。当然其中有些是已知的或是显然的：

$$A_0=A_1=A_2=\cdots=A_n=1$$
$$B_0=C_0=D_0=E_0=1$$

此外，引进的这些未知量不是彼此无关的：

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$$
$$=(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots)(1-x^5)$$

检查两端x^n的系数，可得

$$A_n=B_n-B_{n-5}$$

再找出类似的关系式，从而找出联系已知量和E_{100}的那些中间量，最后就可以把E_{100}的值算出来。

*3.85 求函数$y=x^{-1}\ln x$的n阶导数$y^{(n)}$。

直接通过微分和代数运算可得

$$y'=-x^{-2}\ln x+x^{-2}$$

$$y''=2x^{-3}\ln x-3x^{-3}$$

$$y'''=-6x^{-4}\ln x+11x^{-4}$$

总结一下这些(或更多的)已得的情形，我们可以猜想所求的n阶导数形式为

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-n-1}\ln x+(-1)^{n-1}C_n x^{-n-1}$$

其中C_n是一个依赖于n（但不依赖于x）的整数。证明这个结论，并用n去表示C_n。

*3.86 求

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

的简单表达式（你知道一个有关的问题吗？你能用它的结果或方法吗？）

*3.87 求

$$1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$$

的简单表达式（你知道一个有关的问题吗？你能用它的结果或方法吗？）

3.88（续)推广。

3.89 给定

$$a_{n+1}=a_n\frac{n+\alpha}{n+1+\beta}$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \alpha\neq\beta$，证明

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{a_n(n+\alpha)-a_1(1+\beta)}{\alpha-\beta}$$

3.90 求

$$\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}+\frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2}+\cdots$$
$$+\frac{p}{q}\frac{p+1}{q+1}\frac{p+2}{q+2}\cdots\frac{p+n-1}{q+n-1}$$

3.91 关于数π。考虑单位圆(半径＝1),作它的外切和内接正n边形,令C_n(外切)I_n(内接)分别表示这两个多边形的周长。

引进下列缩写符号

$$\frac{a+b}{2}=A(a,b),\ \sqrt{ab}=G(a,b),\ \frac{2ab}{a+b}=H(a,b)$$

(分别表示算平均值，几何平均值和调和平均值)

(1) 求C_4，I_4，C_6，I_6。

(2) 证明

$$C_{2n}=H(C_n,\ I_n),\ I_{2n}=G(I_n,\ C_{2n})$$

(这样，从C_6，I_6出发，就可以用递归方法算出数的序列：

$$C_6,I_6;C_{12},I_{12};C_{24},I_{24};C_{48},I_{48};\cdots$$

以至任意多项，这样我们就可以把π夹在两个数之间，而这两个数的差是可以任意小的。阿基米德计算了这个数的前十个数，也就是说，一直算到正96边形，他发现了

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

参见*T.L.Heath*《阿基米德论文集》，*pp*.91—98。)

3.92 更多的问题。设计一些与本章所提的问题(特别是那些你能解的问题)类似但又与它们不同的问题。

第四章 叠 加

§4.1 插值法

在叙述我们下面的问题之前，我们先讲以下几点。

(1) 给定n个不同的横坐标

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n.$$

和n个对应的纵坐标

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$$

这就给出了平面上n个不同的点

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$$

我们要找一个函数$f(x)$，使得它在给定横坐标处的值刚好就是对应的纵坐标：

$$f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, f(x_3)=y_3, \cdots, f(x_n)=y_n$$

换言之，就是要找一条方程为$y=f(x)$的曲线，使它恰好通过上面给出的那n个点。见图4.1。这就是所谓插值的问题。

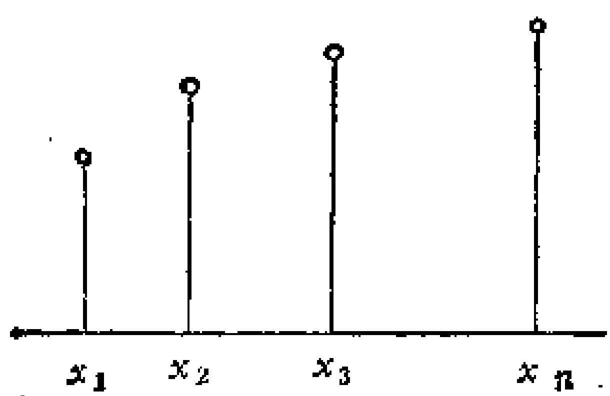


图4.1 插值

让我们探讨一下这个问题的背景，这样可以提高我们对它的兴趣，从而增加我们解决问题的可能性。

（2）当我们在考虑一个量 y 依赖于另一个量x 的时候，就可能会出现插值问题。让我们考虑一个具体的例子：设x表示温度，而y表示等压下一根均匀金属棒的长度。金属棒在任何温度x下都有一个确定的长度y与之对应，这就是我们所说的y依赖于x，或y是x的函数，记为$y=f(x)$。物理学家在实地研究y对x的依赖时，是把金属棒置于不同的温度，

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

之下，并对每一温度测得金属棒的长度，设它们分别为

$$y_1, y_2, y_3\cdots, y_n$$

当然，物理学家也很想知道在那些他还不曾有机会观察到的温度x下金属棒的长度y是多少。也就是说，物理学家想在这 n 次观察的基础上知道函数$y=f(x)$在整个自变量x变化范围内的变化情况——这样他就提出了一个插值的问题。

（3）让我们在这里插上一句，实际上物理学家的问题是比较复杂的。他所测得的值x_1，y_1，x_2，y_2，$\cdots$，x_n，y_n并不可能是所要测的量的“真正的值”，因为测量不可避免的会有误差。所以它的曲线不必通过测得的这些点，而只要很靠近这些点就行了。

此外，在通常情况下我们还要区别下面两种情形：即那个未曾观察的横坐标x（物理学家想要知道对应于它的纵坐标y）是在两头两个观察值（即图4.1的x_1和x_n）的区间内，或在这个区间外：前一种情形，我们称之为内插，而后一种情形，称为外插（一般我们认为内插较外插更为可靠。）

不过，让我们暂时先别管这个区别以及这一小段提到的

别的那些话，还是言归正传，回到(1)和(2)的主题去。

(4) 第(1)段里提出的问题是非常不确定的：因为通过几个给定点的曲线可以有无穷多条。物理学家单凭他那几次观察数据本身，无法去确定这些曲线里的那一条比其他各条更合适。因此如果物理学家决定要画一条曲线，除了他的几次观察外，他必须还要有一些理由才行——是些什么理由呢？

这样，关于插值的问题便引出了一个更一般的问题（这使它变得更加有意思了）：是什么提供了，或证明了由已知观察数据和思想背景到一种数学表示式的过渡呢？这是一个重要的哲学问题——然而，它并不是那种能有圆满解答的重要哲学问题，所以我们还是转向插值问题的别的方面吧。

(5) 我们很自然地把第(1)段里提出的问题转换成去找出一条过n个给定点的最简单的曲线。可是，这样一变，问题不但还是不确定的，反而更含糊了。因为所谓“简单”是很难有客观标准的，每个人都可以根据自己的嗜好、立场、背景、思想和习惯去判断什么是“简单”。

不过，在我们现在这个问题里却可以给出“简单”的一种解释，它是大家能够接受的，并且可由此导出一个确定的有用的数学公式。首先，我们认为加法、减法和乘法是最简单的运算。其次，我们认为函数值可以通过最简单的运算去计算的函数是最简单的函数。基于这样两个观点，我们必然认为多项式是最简单的函数。多项式的一般形状是

$$a_0+a_1x+a_2x^2-\cdots+a_nx^n$$

其函数值可以由给定的系数$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$和自变量x的值通过三种最简单的运算计算出来。如果我们假定$a_n\neq0$，则

多项式是 n 阶的。

最后，对于两个不同阶数的多项式，我们认为阶数低的那一个更简单些。如果我们按照这样的观点，那末求通过 n 个定点的最简单的曲线的问题就变成一个确切的问题，即多项式插值问题，我们可以将它陈述如下：

给定 n 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，和另外 n 个数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，求一个阶数最低的多项式 $f(x)$，它满足下列 n 个条件，

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, \cdots, f(x_n) = y_n$$

§4.2 一个特殊情形

如果我们对所提的问题还束手无策，那末不妨改变一下数据试试。比方说，我们可以让某一个给定的纵坐标固定，而让其余的减小，这样我们就能发现一个特殊情形，它似乎比较好处理一些。我们不必限制横坐标，可以假定横坐标是任意 n 个不同的数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$

但选一组特别简单的纵坐标，它们分别是，

$$0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0$$

（这就是说，除了对应于横坐标 x_2 的纵坐标等于 1 外，其余的纵坐标都等于 0，见图4.2）

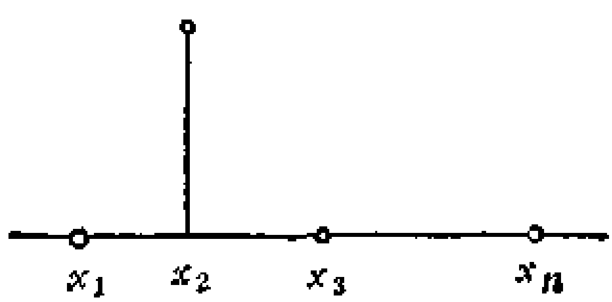


图4.2　一个特殊情形

根据多项式的一条有趣的性质：在$n-1$个给定点上取值为0的多项式(即有$n-1$个不同的根x_1，x_3，x_4，…，x_n)一定能被下列$n-1$个因子整除

$$x-x_1, x-x_3, x-x_4, \cdots, x-x_n$$

因此也一定能被这$n-1$个因子的乘积整除，因而它至少是$n-1$阶的。如果多项式的阶数达到了最低的可能的阶数$n-1$，则它的形状必定是

$$f(x)=C(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)$$

其中C是某个常数。

我们已经用了全部数据吗？没有，对应于横坐标x_2的纵坐标1还没有用到，把它也考虑进来，便得

$$f(x_2)=C(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)=1$$

从这个方程里可算得C，把算得的C值代进$f(x)$的表达式，便得

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)}$$

显然，这个多项式在所有给定的横坐标处都取所要求的值。至此，我们已经成功地解决了特殊情形下的多项式插值问题。

§4.3 组合特殊情形以得出一般情形的解

我们有幸碰见了这样一个易于处理的特殊情形。为了保住这一幸运，我们现在应当考虑怎样去充分利用所得到的解。

稍稍改变一下所得到的解，我们便可处理一个略微推广了的特殊情形：对于给定的横坐标

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

我们让对应的纵坐标分别是

$$0,\ y_2,\ 0,\ \cdots,\ 0$$

用y_2这个因子去乘§4.2得到的表达式

$$y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)}$$

我们就可以得出取上述那些数值的多项式。

在这个表达式中，横坐标x_2跟其他那些横坐标不一样，它扮演了一个特别的角色，但是x_2本身并没有什么特殊之处，我们也可以让别的横坐标来扮演它的角色。这样，如果对于横坐标

$$x_1,\ x_2,\ x_3\cdots,\ x_n$$

我们让相应的纵坐标取下列n行中的任意一行

$$\begin{array}{ccccc} y_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & y_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & y_3, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & y_n \end{array}$$

那末就可以写出一个$n-1$阶多项式的表达式，使得它在相应的横坐标处取的值就是这一行规定的值。

上面我们概述了问题在n种不同特殊情形下的解法。你能把它们组合起来去得出一般情形的解吗？这当然是能做到的，把前面得到的那n个表达式加起来：

$$f(n)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+y_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

结果便得到一个阶数不超过$n-1$的多项式，它满足条件

$$f(x_i)=y_i \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

这一点由$f(x)$表达式的结构，便可以一眼看出来。

（还有什么问题吗？）

§4.4 数学模型

插值问题的上述解法，是拉格朗日*）提出来的，它可以发展成为一个重要的一般方法。你以前曾见过这种方法吗？

（1）可能读者熟悉（或是通过上面讨论回忆起来）通常平面几何里一条熟知的定理："在一圆中，一弧所对的圆心角等于它所对的圆周角的二倍"的证明（在图4.3与4.4中，这段弧是用双线表示的），它是建立在两次观察上分两步完成的，参考欧几里得原本第三卷命题20。

（2）下面是一个容易处理的特殊情形：圆周角的一条边是直径，见图4.3。这时圆心角α显然等于一个等腰三角形的两个角的和，这两个角彼此相等，而且其中一个就是圆周角β。这样就对图4.3这个特殊情形证明了所要的结论

$$\alpha=2\beta$$

（3）下面回到一般的情形，这时我们可以通过圆周角的

*）L.de Lagrange（1736—1813），18世纪著名的法国天文学家和数学家。

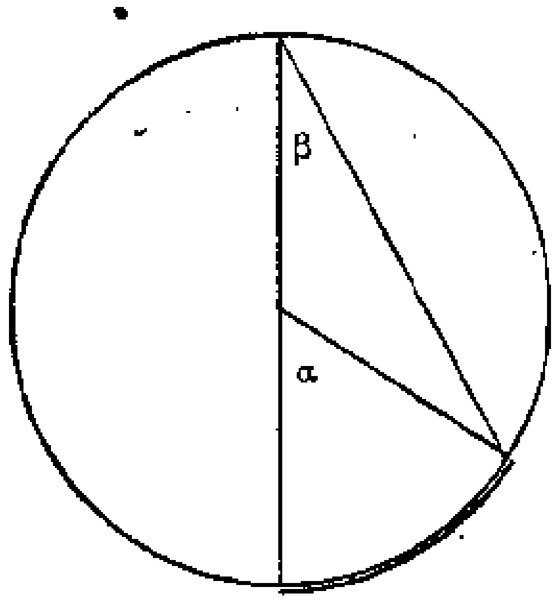


图4.3 一个特殊情形

顶点画上一条直径(图4.4里的虚线),于是在图形里便出现了两次特殊情形，设等式，

$$\alpha' = 2\beta',\ \alpha'' = 2\beta''$$

分别对应这两个特殊情形(见图4.3)，它们是根据第(2)段里的考虑建立起来的。定理里的圆心角α和圆周角β按照图 4.4

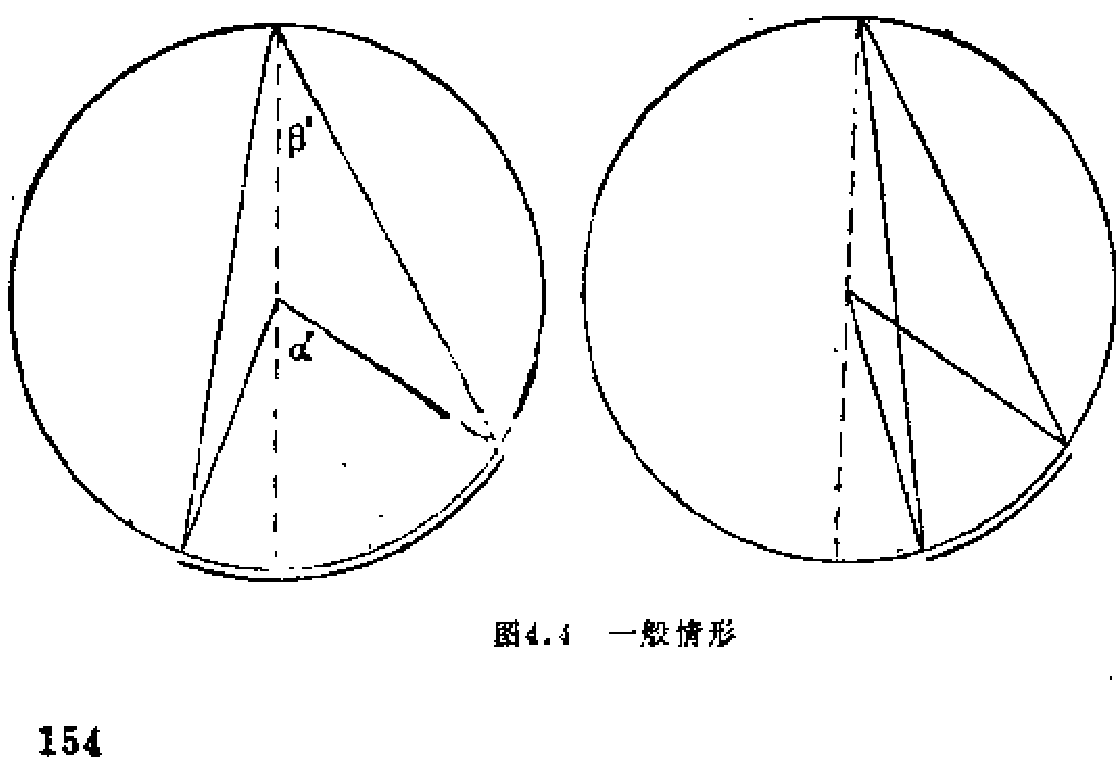


图4.4 一般情形

里的两种不同情形可以表成两个角的和或差

$$\alpha=\alpha'+\alpha'', \beta=\beta'+\beta'' \text{或} \alpha=\alpha'-\alpha'', \beta=\beta'-\beta''$$

现在把前面已经建立起来的那两个等式相加或相减便分别得到

$$\alpha'+\alpha''=2(\beta'+\beta''), \alpha'-\alpha''=2(\beta'-\beta'')$$

这就证明了定理最一般的情形

$$\alpha=2\beta$$

(4) 现在让我们来比较一下本章讨论过的这两个问题，一个是§4.1，4.2和4.3处理的代数里的求解的问题；另一个是本节第(1)、(2)和(3)段处理的平面几何里求证的问题。虽然这两个问题在很多方面迥然不同，但它们的解法却表明了同一个模型。在这两个例子里，结果都是经过两步得到的。

首先，我们找到一个易于处理的特殊情形，并且给出了一个完全适合于这个特殊情形（也仅限于这个特殊情形）的解。见§4.2及本节第(2)段，图4.2和4.3。

其次，把可以求解的若干个特殊情形组合起来，便得到完整的、没有任何限制的、通用于一般情形的解，见§4.3和本节第(3)段。

让我们用下面两段话来强调一下这个模型的特点。

第一步先处理一个特殊情形，它不仅特别容易解决，而且还特别有用，我们可以恰当地把它称之为导引特款，因为它可以把我们引导到一般问题的解法[1]。

第二步是用某种特定的代数运算把一些特殊情形组合起来。在§4.3里，让几个特殊情形的解在乘以给定的常数后

1) MPR，卷 I，p.24习题7，8，9。

加起来便得到一般情形的解。在本节第（3）段，将特殊情形里得到的等式相加或相减从而得出一般情形定理的证明。我们把§4.3里所用的代数运算[它较之第（3）段所用运算更广一些]称为线性组合或叠加（关于这个概念的更多阐述见习题4.11）。

我们可以用上面引进的词句来概括我们的模型：从一个导引特款出发，利用特殊情形的叠加去得出一般问题的解。

下面习题中提到的其他注记和更多的例子，可以使你对上面的概括有更深的理解，你也许还能突破这一概括的限制，把模型扩充到更广的范围中去。

第四章的习题与评注

第一部分

4.1 在证明棱锥的体积等于$Bh/3$时（其中B是棱锥的底，h是它的高），我们可以把四面体（底为三角形的棱锥）的情形看作是一个导引特款，然后利用叠加。具体怎样做呢？

4.2 如果$f(x)$是一个k阶多项式，则存在$k+1$阶的多项式$F(x)$使得

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=F(n)$$

对一切$n=1, 2, 3, \cdots$都成立。

为了证明这个定理，我们可以把习题的3.3的结果当作是导引特款，然后利用叠加。具体怎样做呢？

4.3（续）还有另外一种方法：我们也可以把习题3.34当作导引特款，利用叠加得出此定理的一个不同证法。具体怎样做呢？

4.4 给定系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$，求数$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k$使得方程

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=b_0\binom{x}{k}+b_1\binom{x}{k-1}+\cdots+b_k\binom{x}{0}$$

是x的恒等式（符号与习题3.65同）。

证明这个问题有唯一解。

4.5 运用习题4.3的方法，重新推导§3.3里S_3的表达式。

4.6 运用习题4.3的结论（习题4.2叙述的定理）对于

§3.3里S_3的表达式给出一个新的推导。

4.7 对习题3.3里的问题，习题4.3能得出什么结果？

4.8 §4.1里的一个问题：$n=2$的特殊情形是什么？当只给定两个点时，我们自然说通过它们的最简单的曲线是直线，它是唯一确定的。这跟我们在§4.1(5)中最终采取的观点一致吗？

4.9 §4.2里的一个问题：

$$y_i=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

即一切给定的纵坐标均为0的特殊情形是什么？

4.10 §4.3里的一个问题：所得多项式$f(x)$满足一切条件的分数吗？它的阶数是最低的吗？

4.11 线性组合或叠加　设

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \cdots,\ V_n$$

是n个具有某种明确的性质的数学对象（属于某个确切定义的集合），并且它们与任意n个数

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_n$$

组成的线性组合

$$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+\cdots+c_nV_n$$

也具有同样的性质（属于同一个集合）。

下面是两个例子。

(a)V_1，V_2，V_3，…，V_n是阶数不超过某给定数d的多项式，它们的线性组合也是一个阶数不超过d的多项式。

(b)V_1，V_2，V_3，…，V_n是平行于一给定平面的向量，它们的线性组合（这里加法是向量的加法）也是一个平行于该平面的向量。

例(a)是我们在§4.3里讨论过的。对于§4.4第(3)段，

我们只要注意到加法与减法乃是线性组合的特殊情形（这里$n=2$；加法与减法分别对应于$c_1=c_2=1$和$c_1=-c_2=1$）。

例(b)是有启发性的。凡是按"通常"代数法则线性地组合起来的对象，都称之为"向量"，它们的集合在抽象代数里称为是"向量空间"。

向量空间的线性组合在很多近代的数学分支里占着重要的地位。在这里我们只能考虑少数几个初等的例子(习题4.12，4.13，4.14和4.15)。

这里"线性组合"和"叠加"表示的是同一个意思，不过，我们更常用后面这个词。"叠加"这个词在物理学中是经常使用的(特别是在波的理论中)，我们这里只讲了一个物理学中的例子——习题4.16，它对我们来说是够简单的，但却是很重要的。

*4.12 常系数齐次线性微分方程　这种方程的形式是

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

其中a_1，a_2，…，a_n是给定的数，称为方程的系数；n是方程的阶；y是自变量x的函数；y'，y''，…，$y^{(n)}$是y的各级导数。满足方程的函数y称为是一个解，或一个"积分"。

(a) 证明解的线性组合还是一个解。

(b) 证明它有一个特殊形式的特解

$$y=e^{rx}$$

其中r是一个适当选择的数。

(c) 把这种特殊形式的特解组合起来去得出它的尽可能一般的解。

*4.13 求满足微分方程

$$y''=-y$$

和初始条件

$$当x=0时，y=1，y'=0$$

的函数y。

4.14 常系数齐次线性差分方程　这种方程的形式是

$$y_{k+n}+a_1y_{k+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{k+1}+a_ny_k=0$$

a_1，a_2，…，a_n是给定的数，称为方程的系数；n是方程的阶；无穷数列

$$y_0，y_1，y_2，\cdots，y_k，\cdots$$

如果对于$k=0$，1，2，…，它们都满足方程，就称为是方程的一个解。

（我们可以把y_x看作是自变量x的一个函数，其中x取非负的整数值。另一方面，我们可以把所给的方程看作是一个递归公式，也就是说，我们有一个统一的法则，使得能根据它用数列中y_{k+n}前的n项，y_{k+n-1}，y_{k+n-2}，…，y_k算出y_{k+n}来或用y_k前的n项y_{k-1}，y_{k-2}，…，y_{k-n}算出y_k来。）

（a）证明解的线性组合还是一个解。

（b）证明它有一个特殊形式的特解

$$y_k=r^k$$

其中r是一个适当选择的数。

（c）把这种特殊形式的特解组合起来去得出它的尽可能一般的解。

4.15 费波那契数列，

$$0，1，1，2，3，5，8，13，\cdots$$

是由差分方程（递归公式）

$$y_k=y_{k-1}+y_{k-2}\qquad(k=2，3，4，\cdots)$$

和初始条件

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

定义的。试用 k 去表示y_k。

4.16 运动的叠加 伽里略发现了落体运动规律和惯性定律，他把它们结合起来，便找出了抛射体的轨道（即抛射体描绘的曲线）。对近代符号的好处有所了解的读者不妨可以自己把伽里略的发现复现一遍。

设 x 和 y 表示铅直平面内的直角坐标，x 轴是水平的，y 轴是朝上的。一个抛射体（即不受阻力作用的质点）在此平面内从瞬时 $t=0$ 由原点开始运动，这里 t 表示时间。抛射体的初速度是 v，其初始运动方向与 x 轴正方向交成的角为 α。我们可以考虑跟这个真实运动相关联的从同一时间同一地点开始的三个虚拟运动：

（a）一个重质点从静止开始自由下落，在时间 t 的坐标是

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{1}{2}gt^2$$

（b）一个不受重力作用的质点，以给定初速度的铅直分量 $v\sin\alpha$ 为其初速度，由惯性定律，在时间 t 的坐标是

$$x_2 = 0, \quad y_2 = tv\sin\alpha$$

（c）一个不受重力作用的质点，以给定初速度的水平分量为其初速度，由惯性定律，在时间 t 的坐标是

$$x_3 = tv\cos\alpha, \quad y_3 = 0$$

如果实际运动是由这三个按照“最简单的”假定虚拟出来的运动的合成，那末它的轨道是什么？

第二部分

下面我们将向读者提供一些参与研究活动的机会。这里主要是指的习题4.17和4.24。

4.17 *多种解法* 在一四面体里，两条相对的棱有相等的长度 a，它们互相垂直，并且每一条都垂直于连接它们中点的长度为 b 点直线。求四面体的体积。

这个问题可以用几种不同的方法去解。需要求助的读者可以去看下面的习题4.18—23中的某些题或全部。如果他想把这里涉及的空间关系弄得具体些，可以去找一个简单的正交投影或是简单的截面。

4.18 *未知量是什么？* 习题4.17的未知量是四面体的体积。

怎样才能求得这种类型的未知量？ 如果给定四面体的底面积和高，就能计算它的体积——但是习题里4.17这两个量都没有给出来。

那末，*未知量是什么呢？*

4.19 (续)你需要求三角形的面积——*怎样才能求得这种类型的未知量？* 如果给定了一个三角形的底和高，就能计算它的面积。但是作为习题4.17那个四面体的底的三角形，只给出了这两个量中的一个。

你需要求一个线段的长度——*怎样才能求得这种类型的未知量？* 通常我们是从某个三角形去计算一个线段的长度——但是在这个图形里，没有一个三角形是可以包含习题4.17里四面体的高的。

事实上，暂时这里还没有这样的三角形，不过*你能引进一个来吗？* 不管怎样，先引进适当的符号并把你能发现的东西都综合起来。

4.20 *下面是一个与此问题有关且前已解出的问题：*“如果给定四面体的底面积和高，便可求出它的体积。”你不可

能立即把它用于习题4.17，因为那个四面体的底面积和高都没有给出来。然而，这周围可能有其它便于处理的四面体。

4.21 (续)这里面可能有其它便于处理的四面体。

4.22 识广谋就多 如果你晓得棱台公式，习题4.17就容易做了。

棱台是一个多面体。棱台的两个互相平行的面称为下底和上底，其它的面称为侧面。棱台有三类棱：即围成下底的棱，围成上底的棱和侧棱。棱台的任何侧棱都连接了下底的一个顶点和上底的一个顶点(这是定义的一个重要部分)。棱柱乃是一个特殊的棱台。

棱台上、下两底之间的距离是它的高，与上、下两底平行并与它们距离相等的平面截棱台于一多边形，称为中截面。

设V是棱台的体积，h是它的高，

$$L, M \text{和} N$$

分别是它的下底面、中截面和上底面的面积，则

$$V=\frac{(L+4M+N)h}{6}$$

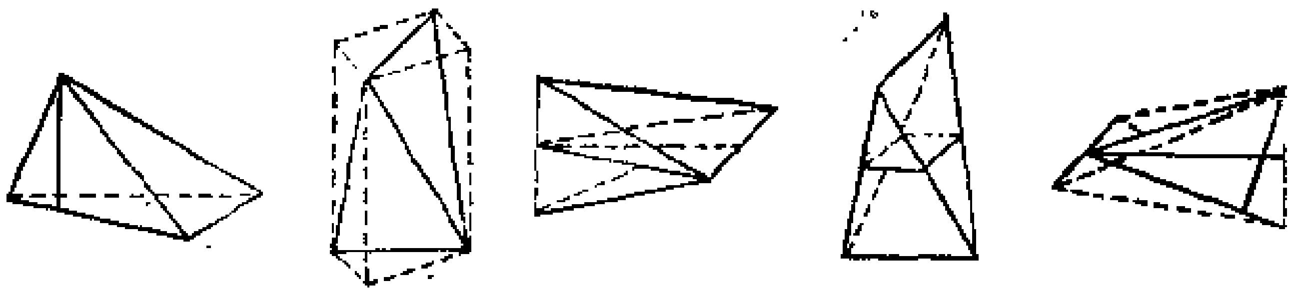
(V的这个表达式称为棱台公式。)

用它去解习题4.17。

4.23 或许你已经放弃了从习题4.18开始通过习题4.19去解出习题4.17的途径，而沿着别的路线得到了结果。如果是这样的话，那末请看一下结果，再回到那个放弃了的道路上，并沿着它走到底。

4.24 棱台公式 研究问题的各个方面，从不同的角度去考虑它，在脑子里反复思考——我们照这样作了，再审视一下图4.5。对于同一个结果，在找出了四种不同的推导方

法之后，我们就应能从它们的比较中获得裨益[2]。



a　b　c　d　e

图4.5　反复思考，从不同的角度去考虑它，研究所有的方面。

在我们的四个推导中，三个没有用棱台公式，只有一个用了这个公式(习题4.22)。因此，对于夹在所处理的问题中的棱台公式的特殊情形，事实上，至少是在暗中已得到了三种不同的证明。我们能否从这些证明中明确提出一个，把它扩展到不仅能证明这个公式的特殊情形，并且也能证明它的一般情形呢？

从表面上看，问题的三种推导(习题4.20、4.21和习题4.18，4.19，4.23)中哪一个最可能被挑中？

4.25 对棱柱验证棱台公式(它是一种非常特殊的棱台)。

4.26 对棱锥验证棱台公式(从某种意义上说，棱锥可以看成是棱台的退化的、极限的情形，即它可以看成是上底缩成了一个点的棱台。

4.27 为了把作为习题4.20解法的基础的特殊情形加以推广，我们考虑把一个棱台P剖分成n个互不重叠的棱台P_1，P_2，$\cdots P_n$，这些棱台拼成了整个的P，并且它们的下底拼成了P的下底，它们的上底拼成了P的上底。(在习

2) 这里，我们遵从莱卜尼兹的主张；见习题3.31的引文。

题4.20的情形，见图4.5b，P是一个底为正方形的棱柱，$n=5$，P_1，P_2，P_3和P_4是合同的四面体，P_5是另一四面体。）证明：如果棱台公式对于所考虑的$n+1$个棱台中的n个都是成立的，则它必对余下的那个棱台也成立。

4.28 为了把作为习题4.22解法的基础的特殊情形加以推广(图4.5d)，我们令l和n表示一个四面体相对的两个棱(l表示下面的，n表示上面的)。作一平面通过l并平行于n；再作另一平面通过n并平行于l；令h表示这两个(平行)平面间的距离。这个四面体可看成是一个棱台（一个退化的棱台)，棱l和n分别是它的下底和上底，而h是它的高(中截面是一个平行四边形)。

对这一类棱台验证棱台公式。

4.29 证明一般情形的棱台公式(把前面处理过的特殊情形叠加起来)。

4.30 *最弱的一环就代表了全链的强度* 重新审查习题4.28的解法。

4.31 重新审查习题4.29的解法。

4.32 *辛卜生(Simpson)公式* 设$f(x)$是定义在区间

$$a\leq x\leq a+h$$

上的(连续)函数，令

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = I$$

$$f(a)=L,\ f(a+\frac{h}{2})=M,\ f(a+h)=N$$

则在某些条件(我们将去探讨)下，有

$$I=\frac{L+4M+N}{6}h$$

f的这个表达式就称为辛卜生公式。

设n是一个非负整数，取

$$f(x)=x^n,\ a=-1,\ h=2$$

试确定n的值，使得函数的积分可以用辛卜生公式表达出来。

（即使辛卜生公式并不精确地成立，它也可以“近似地成立”，也就是说，公式两端的差相对来说可以很小。这一情形是经常出现的，因此对于积分的近似估值，辛卜生公式是十分重要的）。

*4.33 证明当$a=-1$和$h=2$时，辛卜生公式对任何阶数不超过3的多项式都成立。

*4.34 证明辛卜生公式对任何阶数不超过3的多项式都成立，这里a和h可不加任何限制。

*4.35 利用立体解析几何和积分计算由习题4.34导出棱台公式（数学教师总是告诉我们“为了鉴识简单的方法先去试试复杂的方法”）。

4.36 *扩大模型的范围* 在解决前面某些问题时，我们实际上已经超出了§4.4(4)中叙述的叠加模型的范围。事实上，我们通过某些容易处理的特殊情形的叠加，已经得出了一般情形的解。但是这些特殊情形并不全是同一类型的，它们并不全属于同一种特殊情形（在习题4.29的解法中，所叠加的立体有些是习题4.26里处理过的棱锥，另一些是习题4.28里处理过的具特殊位置的四面体。在习题4.33的解法中，我们也是把一些不同类型的情形叠加起来）。从本质上看，我们只是在一点上偏离了§4.4(4)所叙述的模型：我们不是从一个导引特款而是从若干个这种特款出发的。所以，让我

们把模型概括得更广一些：从一个导引特款或若干个这种特款出发，利用特殊情形的叠加去得出一般问题的解。

叠加模型指出了一条从一个导引特款（或少数几个这种特款）通向一般情形的道路。但是还有一种完全不同的联系一般情形和导引特款的方法：我们常常能用一个适当的变换把一般情形归结为一个导引特款（例如，习题4.34的一般情形可以通过一个积分变量的替换，归结为习题4.33的特殊情形）。这一方法也是用心的解题者同样应当去掌握的。关于这方面的有启发性的讨论请参见J.阿达玛《初等几何教程，平面几何》，几何变换的方法，*pp*.262—270(中译本)。

第二部分　通向一般方法

正如阳光普照万物，我们的智慧和学识
在处理各种不同对象时也是一视同仁的。

《笛卡儿全集》，第十卷，p·360；法则Ⅰ。

第五章　问　　题

解题是最突出的一类特殊的自由思维。

威廉・詹姆斯*)

§5.1 什么是问题？

在下文中，“问题”这个词将在广泛的意义下去理解，我们第一件事就是谈一下它的含义。

在现代生活中，吃饭常常已不是问题。假若我在家里觉得饿了，我就到冰箱里去找点吃的，假如在城里，我就到一家咖啡馆或者别的馆子里去。但是当冰箱里空无一物，或者在城里碰巧没有带钱，那么情形就不一样了。在这种情况下，吃饭就成了一个问题。一般来说，一个念头可以产生一个问题，也可以不产生什么问题。一个涌上脑际的念头，倘若毫无困难地通过一些明显的行动就达到了所求的目标，那就不产生问题。然而，倘若我想不出这样的行动来，那就产生了问题，那就是意味着要去找出适当的行动，去达到一个可见而不即时可及的目的。所谓解一个问题，就是意味着去找出这样的行动。

如果问题非常困难，这就是一个大问题，如果难度不大，那就只是一个小问题。而困难的程度就含于问题的概念本身之中：那里没有困难，那里也就没有问题。

---

*)威廉・詹姆斯（William James，1842—1910）美国杰出的心理学家。

一个典型的问题，就是要找出一条通到某个我们不大了解的区域内一个指定地点的道路。我们可以想象，这个问题对于居住在原始森林里我们的太古祖先们来说，是多么重大。这也许是(或许不是)一个原因，即我们不知道怎么总是把求解一个问题看作去寻找一条道路：一条摆脱困境、越过障碍的道路。

我们的自觉思维的大部分是与问题关联着的。当我们并不耽迷于空思冥想时，我们的思想总是朝着某一个目标：我们寻求达到这个目标的道路或手段，或者去想出能藉以达到我们目的的步骤。

解决问题是智慧的特有的成就，而智慧乃是人类的天赋。越过障碍，或在没有路的地方去开出路来，这种能力，把机灵的动物与鲁钝的动物区别开来，它使人高踞于最机灵的动物之上，同时也把能干的人和他们的同伙区别开来。

对于人类，没有其它事物比人的能动性更有意思了。而人的能动性的最大特征就是解决问题，有目的地去思考和为达到预期的目标而想方设法。我们这里的目的就是去了解这个能动性——在我看来，这个目的应该引起我们极大的兴趣。

在前面，我们把可用相同方法求解的问题综合起来，研究了不少初等数学的问题。我们已经得到了一定的经验，现在我们将在这些经验的基础上，试图上升到更高的一般性，并尽可能地把非数学的问题也包罗进来。想得到一个能应用于各类问题的一般方法，似乎是心志太高了，但这也是很自然的：虽然我们面对的问题是变化无穷的，但我们每一个人都只有一个脑袋去解决它们，因此我们自然期望恰有一个方法去解它们。

§5.2 问题的分类

一个学生正在进行数学笔试。他不过是一个中常学生，但他在试前做了不少准备工作。在看了一道题目之后，他也许问一下自己："这是哪一类的问题？"实际上，问一下这个问题对他是有好处的：假若他能分辨出这个题的类别，认出它的类型，把它归到课本的某章某节，他就前进了一大步；现在他就可以回忆学过的解这类问题的方法了。

在某种意义上讲，解决各种程度的问题也都是如此。"这是哪一类的问题？"从这个问题，立即就引导到下一个问题："关于这类问题我们能做些什么？"而问一下这些问题，甚至对于十分高级的研究工作也是有益的。

因此，把问题分类，把它们区别为各种不同的类型是有用的。一个好的分类法是这样进行分类的，它的每一类问题都有相应的一类解法。

我们这里并不打算引进一个详尽的或完整的分类法，而仅仅按照我们自己所理解的欧几里得及其注解者们的一个传统，去描述问题的两种非常一般的类型。

欧几里得的原本包括有公理，定义和"命题"。他的注解者和一些译者把他的"命题"分为两类：第一类（拉丁名字是"problema"）的目的是作图，第二类（拉丁名字是"theorema"）的目的是证明一个定理。把这种分类法推广，我们来考虑两类问题，即所谓"求解"的问题和"求证"的问题。"求解的问题"的目的就是去寻找（去构造，生成，得到，等同，……）某一个对象，即问题的未知量。"求证的问题"的目的就是去确定某一个结论是对的或是错的，去证明它，或是去否定它。

比如，当你问“他说了些什么？”时，你就提出了一个求解的问题。然而当你问“他说了那个没有？”你就提出了一个求证的问题。

关于这两类问题详细的讨论见以下两节。

§5.3 求解的问题

“求解的问题”的目的就是要找出某一对象，即问题的**未知量**，这个未知量应当满足那些把未知量和**已知量**联系起来的条件。让我们考虑两个例子。

“给定两线段 a，b 和一角 γ，求作一平行四边形，它的相邻两边为给定线段 a、b，两边夹角为 γ。”

“给定两线段 a、b 和一角 γ，求作一平行四边形，使得它的两条对角线为给定线段 a、b，对角线的夹角为 γ。”

在这两个问题中，已知量是相同的：线段 a、b 及角 γ。两个问题中的未知量都是一平行四边形，因此单凭未知量的性质是不可能把问题区别开的。在这里，造成问题的差异的是条件，即在未知量和已知量之间所要求的关系；当然，平行四边形与其边的关系同它与对角线的关系是不同的。

问题的**未知量**可以是任何可以想象的事物。在几何作图问题中未知量是一个图形，譬如一个三角形。当我们去解一个代数方程时，未知量就是一个数，即方程的一个根。当我们问“他说过些什么？”时，未知量就可以是一个字，或一连串字，即一个句子，或一连串句子，即一篇讲演。一个叙述清楚的问题必须说明未知量所属的种类（集合）。我们必须从一开始就明确我们要找的是什么样的未知量；一个三角形，或一个数，或一个字，或……。

一个叙述清楚的问题必须说明未知量应当满足的条件。在问题的未知量所属的集合中，凡满足问题的条件的一切对象，组成一个子集合，每一个属于这个子集合的对象称为是问题的一个解。这个子集合可以只包含一个对象，这时解就是唯一的。这个子集合也可以是空集合，这时问题就无解。（关于“解”这一词的注释见习题5.13。）我们这里可以看到，一个求解的问题可以有不同的含意。从严格的意义上讲，问题要求找出（生成，构造，等同，列出，描绘出，……）所有的解（即上面提到的整个子集合）。从不那么严格的意义上来讲，问题可以仅要求一个（仅一个）解，或若干解。有时候确定一下解的存在性就够了，即要确定一下解的集合是空，还是不空。一般来说，对于数学问题，我们常作严格意义上的了解，除非非严格意义上的要求已经在问题中明白表示出来了。不过在许多实际问题中，“严格意义”是很少有意义的。

当我们处理数学问题时（除非上下文之间出现矛盾），我们将用“已知量”或“数据”这个词去表示一切根据条件规定与未知量联系着的给定的（已知的，允许的，……）对象。如果问题是根据三边去作一三角形，那末数据就是三个线段a、b、c。如果问题是去解二次方程

$$x^2+ax+b=0$$

则数据就是两个给定的数a和b。一个问题可以仅有一个数据，或完全没有数据。例如，“求出圆面积与其外切正方形的面积之比”。因为所求比数是与图形大小无关的，所以不必给出半径的长度或其它这类数据。

我们称未知量、条件和已知量这三者是求解的问题的主要部分。事实上，我们没有理由希望去解出一个我们所不了解的问题。然而，要了解一个问题，我们就必须知道，而且十分清楚地知道什么是未知量，什么是已知量，和什么是条件。因此当我们着手去解决一个问题时，应当特别留意它的主要部分，这样作将是明智的。

§5.4 求证的问题

有一个流言，说国务卿在某一场合提到某国会议员时，用了极其粗鲁的语言（这里不必重述它）。这一流言引起了相当大的疑问，“他是不是说了那些话？”这个问题激动了许多人，在报纸上引起争论，甚至在一个国会的委员会里也提到了它，也许还可能上法院。无论哪一个人，只要认真对待这个问题，他就面临着一个“求证的问题”。他应当去解除关于这个流言的疑问，他应当证明有这个话或是否定有这个话。但无论证明或否定，都必须要有有效的证据。

当我们拿到一个数学上的“求证的问题”时，我们就应当排除一个关于 A 的疑问，这里 A 是一个明确叙述的数学结论，即我们应当证明 A，或是否定 A。有一个著名的这类问题，就是证明或者否定哥德巴赫猜测：假若 n 是大于 4 的偶数，则 n 可表成两个奇素数之和[1]。

这里叙述的哥德巴赫断言（它仅仅是一个断言，我们还不能肯定它是对的或是错的）具有数学命题最常见的形式：它由假设和结论组成，由“假若”开始的第一句话是假设，

---

1) MPR，卷，Ipp.4—5。

由“则”开始的第二句话是结论[1]。

当我们要去证明或否定一个以最常见的形式叙述的数学命题时，命题的假设和结论称为问题的主要部分。事实上，这些主要部分值得我们特别注意。为了证明命题，我们应当去发现在主要部分之间即假设与结论之间的逻辑联系，为了否定命题，我们应当证明（若可能的话用一反例）主要部分里的一部分——假设，并不蕴含另一部分——结论。许许多多大大小小的数学家，试图去排除关于哥德巴赫猜测的疑团，但是没能成功。虽然只需要很少的知识就能了解它的假设和结论，但是还没有人能以严格的论述在建立两者之间的逻辑联系上取得成功，也没有人能够作出一个反例。

§5.5 未知量的元，条件的分款

假若我们的问题是要作一个圆，那末事实上我们必须去找两个量：圆心和半径。把我们的任务分成两半也许是方便的：所缺的是两个量，圆心和半径，那末我们先去求出第一个，然后再去求出另一个。

假若我们的问题是要用解析几何在空间找出一个点，那末实际上我们就必须找出三个数：即点的三个坐标 x, y 和 z。

按照我们所采取的观点，我们可以说，在第一个例子里，有两个未知量或仅仅一个未知量（圆），在第二个例子

---

1) 有这样的数学命题，它不能自然地分成假设和结论，见HSI，p.155，求解的问题，求证的问题，4．这里举一个这种类型的命题：“在数 π 的十进位小数表示里，有一段连续出现了九个数字9”。证明或者否定这一命题，是一个确定的数学问题。不过现在要解决它似乎是无望的。“一个笨蛋能够提出九个聪明人都回答不了的问题”。

里，有三个未知量或仅仅一个未知量（点）。还有另外的观点用起来也是方便的：我们可以说，在两个例子里，都只有一个未知量，但它在某种意义上是“被分划的”。于是，在我们的第一个例子里，圆是未知量，但它是一个二元未知量，它的元就是它的圆心和它的半径。类似的，在我们第二个例子里，点是一个三元的未知量，它的元就是它的三个坐标 x，y 和 z。一般地，我们可以考虑一个多元的未知量 x，它含有 n 个元 x_1，x_2，…，x_n。

上面引进的术语的一个好处，就是在某些一般性的讨论中，我们不需要再把含有一个未知量的和含有多个未知量的问题区分开来了。实际上，我们可以把后一情形归结为前一种情形，只要我们把那些多个未知量考虑成是一个未知量的元即可。例如，在 § 5.3 中我们所说过的那些原则，实质上仍然可以应用到那些需要找几个未知量的问题上，虽然这个情形在 § 5.3 中并没有明显提到。下面我们将会见到我们的术语在本书的许多地方都是很有用的。

假若我们的问题是一个求解的问题，那末把条件分成几个部分或几个分款也是有好处的，我们在前面已经有不少机会看到这一点了。在解决几何作图问题中，我们可以把条件分成两部分，使得每一部分都生成一个未知点的轨迹（第一章）。在应用代数去求解“文字题”时，我们把条件分成许多部分，其个数与未知量一样多，这样每一个部分都得到一个方程（第二章）。

假若我们的问题是“求证的问题”，那末我们把假设或结论，或同时把两者分成适当的部分或分款都是很有好处的。

§ 5.6 所要求的：程序

在按照欧几里得原本的方式去作图时，我们不能自由地去选择工具和仪器：我们是在仅用直尺和圆规的假定下去作图的。于是问题的解实际上就包括了从已知数据出发，最后达到所要求的图形的一系列非常协调的几何操作：我们的每一步都是作直线和作圆以及决定它们的交点。

这个例子可以打开我们的眼界。看得更深入一些，我们就可以看出许多问题的解法实质上包含着一个程序，一系列的动作，一个互相紧密联系着的运算系统，一个操作法（拉丁原文是modus operandi）。

以解二次（或三次，四次）方程的问题为例。这个解法包含在一个非常协调的代数运算系统中，它从已知数据——代数方程的系数出发，最后达到所求的根；我们的运算是加、减、乘、除给定的或前已求得的量，或者是这些量的开根。

再考虑一个"求证"的问题。这个问题的解，即我们努力的结果是一个证明，也就是一系列非常协调的逻辑运算，这些运算步骤从假设出发，终止于定理所要求的结论：每一步都是从适当选择的假设部分出发，或从已知事实、从前面已经推证出来内容出发，去推证出新的东西。

非数学的问题也有类似的方面。一个桥梁的建筑师必须把各种各样大量而繁杂的操作，如构筑引道，运输装备，搭支手架，浇注混凝土，铆接金属部件等等都组织起来，并加以协调使形成互相配合的统一的工程。除此而外，他还必须把这些操作与其它一些性质完全不同的事情联系起来：诸如财务，法律以致政界事务。所有这些操作都是互相关联

的；它们中的大部分都必须在其它一些操作已经实行了的情况下才能进行。

我们再以侦探小说为例。其中未知量是杀人犯；作者试图用侦探英雄的功勋来打动读者，这个侦探设计了一个侦察方案，即一系列侦察行动，它从发现第一个蛛丝马迹开始，直到最后辨认出杀人犯并把他逮捕归案告终。

我们寻求的对象可以是具任何性质的一个未知量，或是关于任何类型问题的一个待发现的真理；我们的问题可以是理论的或者是实际的，可以是大问题，也可以是小问题。为了解决我们的问题，我们必须设计出一个经过周密考虑的前后连贯的行动方案，这些行动可以是逻辑运算、数学推导，也可以是具体的操作，它们从假设开始，到得出结论终止，或是从已知数据开始，到求出未知量为止。总而言之，是从我们已有的开始，到得出我们所需要的为止。

第五章的习题与评注

5.1 正棱柱的底为正方形，给定底边的长 a 与正棱柱的高 h，求它的体积V。

未知量是什么？已知量是什么？条件是什么？

5.2 求两个满足方程

$$x^2+y^2=1$$

的实数 x 和 y。

未知量是什么？已知量是什么？条件是什么？描述一下解的集合。

5.3 求两个满足方程

$$x^2+y^2=-1$$

的实数 x 和 y，描述一下解的集合。

5.4 求两个满足方程

$$x^2+y^2=13$$

的整数 x 和 y，描述一下解的集合。

5.5 求三个满足不等式

$$|x|+|y|+|z|<1$$

的实数 x，y 和 z，

1)描述解的集合。

2)把不等式中的$<$改为$\leq$，描述改动后的问题的解的集合。

5.6 叙述毕达哥拉斯定理。

什么是假设？什么是结论？

5.7 令n表示正整数，$d(n)$表示n的因数的个数（我们指的是正整数因数，并把1和n也列为n的因数）。例如

6有因数1，2，3，6；　$d(6)=4$

9有因数1，3，9；　　$d(9)=3$

考虑命题：

若n是平方数，则$d(n)$是奇数，否则$d(n)$是偶数。

什么是假设？什么是结论？

5.8 是求证还是求解？

数$\sqrt{3}+\sqrt{11}$和$\sqrt{5}+\sqrt{8}$相等吗？若不相等，哪一个大些？

我们来一般地谈谈这个问题。问题牵涉的是两个数a和b，要求我们确定下列三种可能情形

$$a=b,\ a>b,\ a<b$$

究竟哪一种成立。

我们可以看一下这个问题的不同方面：

(1) 首先，我们必须去证明或者否定命题$a=b$。假如这个命题的结论被证明是错的，我们就必须进而去证明或否定命题$a>b$。我们也可以把这两个命题的证明次序颠倒过来。总而言之，在这里我们碰到的是两个互相有联系的求证问题。

(2) 在数学的许多分支里广泛运用着符号函数$\operatorname{sgn}x$，它定义如下：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

于是上面所叙述的问题也就成了要求我们去确定数 sgn $(a-b)$：这是一个求解的问题。

这里并没有形式上的矛盾（假如我们名词术语用得恰当，它们可以不止一种形式）：在(1)里，我们有一个问题 A，它由两个有联系的、并列的求证问题组成；在(2)里，我们有一个问题B,它是一个求解的问题。我们并不把这两个用不同词句表述的问题 A 与 B 视为等同的——但它们却是等价的（“等价”这个词的用法在*HSI*，辅助问题6，*pp*. 53—54里有说明，在本书第九章还将再次说明）。

这一个问题的不同提法，并不带来实际上的不便。相反，它使我们看到了同一个困难的不同方面，某个方面也许比另一方面更能对我们有所启示，它也许会显示出一个更加易于入手的方面，从而提供一个便于克服困难的机会。

5.9 *更多的问题*。对任一问题(在前面几章里有许多)，确定它是“求解”的问题还是“求证”的问题。并按不同的问题进一步问：

什么是未知量？什么是已知量？什么是条件？

什么是结论？什么是假设？

这里提这些问题的目的仅仅是为了使你熟悉问题的主要部分。然面经验会告诉你，如果对这些问题认真地问了和仔细地回答了，将对解题带来很大帮助：把注意力集中到问题的主要部分，将会加深你对问题的理解并把你引到正确的方向上去。

5.10 *求解的程序可以由无限次操作或运算组成*。如果我们要去解方程

$$x^2=2$$

我们的任务可以有不同的提法。它可以这样提出："求 2 的算术根到五位有效数字"；在这情形下我们只要算出数字1.4142就完了。然而，这个问题也可以没有任何附加限制而这样提："开出 2 的方根"，这时，即使我们把数算到小数点后面四位甚至任何位数都不能说任务已经完成了；这个答案应当是一个程序，一个算术运算方案，由这个方案可以算出这个数的十进位数的任何要求的位数。

下面是另一个例子："求圆与其外切正方形的面积之比"，答案是$\frac{\pi}{4}$（假如我们认为π的值是不言而喻的）。莱卜尼兹把答案（即$\frac{\pi}{4}$）用无穷级数的形式给出

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

这个级数事实上规定了一个永无穷尽的算术运算序列，它可以使我们达到π的十进位表示中的任何位数（从理论上说是这样，但在实践中这个运算步骤是太慢了）。莱卜尼兹说："虽然这个级数，如它所表示的那样，并不适宜于进行快速的逼近，但是作为圆与其外切正方形的比的表示，我想不出还有别的什么更适合更简单的形式了。"[3]

5.11 化圆为方。在解一个"求解"的问题时，我们要找一个对象（"未知"的对象），我们经常是通过找一个程序（一系列操作或运算）去得到那个对象。为了与所要求的未知量有所区别，我们称这个要求的程序为"运算未知量"。

3）见Gerhardt编莱卜尼兹的《哲学著作集》（Philosophische Schriften）第四卷，p.278。

这一区别是必要的，我们可以用历史上的一个例子来加以说明。

给出了圆的半径，用直尺与圆规作一正方形，使得它与圆有相同的面积。

这就是著名的古代“化圆为方”问题的严格叙述，它是由早期的希腊几何学家提出来的。我们要强调的是，问题本身就规定了程序（“运算未知量”）的性质：我们必须用直尺和圆规，依靠画直线和画圆，并仅用给定的点及中途画出的线的交点来作出所求正方形的边，当然，我们应该从给定半径的两个端点出发，通过有限次步骤，得到所求正方形的边的两个端点。

多少个世纪以来，有数不清的人曾试图求解这个问题，但均未成功。188?年弗·林德曼(F·Lindeman)证明了这个问题没有解。然而与圆具有相同面积的正方形无疑是“存在”的（今天已经知道，它的边可以用许多不同的无穷过程逼近到任何预先给定的精度，其中之一就是习题5.10中那个由莱卜尼兹提出的著名级数)。但是，我们所要求的那一类程序(由有限次的直尺圆规的操作去作图）却是不存在的。我不知道弄清了所求图形与所求程序或“未知对象”和“运算未知量”之间的区别以后，是否会减少一些不幸的圆一方问题的探求者。

5.12 次序和因果。在桥梁建筑中，把一个预制金属部件安装到确定的位置上是一个重要的操作。这样两个操作的前后次序有时是很重要的（当第一个没有固定好第二个就无法固定时）。但有时也可以是无关紧要的（当两个部件是独立时）。因此，两个操作在实施时，也许要注意它们的先后

次序，但也许用不着。类似的，在讲授中或在著作中，一个证明的许多步骤也是有先后次序的。然而，一个步骤在时间上先于另一步骤并不一定在逻辑上也居先。我们必须弄明白次序和因果的区别，弄清楚时间上的先后和逻辑上的联系的不同。（我们将在第七章再来讨论这一重要问题。）

5.13 不幸的多义词。"解"这个字有若干不同的含义，其中有些很重要，应该用确切的词句加以阐明。如果这方面缺乏确切的词，我可以提供几个这样的词（后面附上德文*）的词）：

求解的对象（solving object，Lösungsgegenstand）是满足问题条件的对象。如果问题的目标是解代数方程，那末满足方程的一个数，即方程式的一根，就是一个求解的对象。只有"求解"的问题才能有求解的对象。在一个叙述确切的问题里，求解的对象所属的类（集合）必须预先说明——我们必须事先知道所要寻求的是一个三角形呢，还是一个数或其他什么。事实上，这样的说明（明确指出未知量所属的集合）是问题的重要部分。"求出未知量"就意味着去找出（等同，构造，生成，得到，……）求解的对象（所有求解对象的集合）。

求解的程序（soluing procedure，Lösungsgang）是一个程序（构思，运算方案，一系列论断），它或是最终求出"求解问题"的未知量，或是最终消除对"求证的问题"的结论的怀疑。因此，"求解的程序"这个词可应用于两类问题。在我们工作之初，我们并不知道求解的程序或合适的运算方案，但我们始终在寻求它，希望最终能知道它；这个程

*）还有英文的词。

序是我们寻求的目标，从某种意义上来讲，它实际上是我们的未知量，我们可以说，他是我们的“运算未知量”。（参见习题5.11。）

我们还可以谈一谈“求解的工作”（work of solving, Lösungsarbeit）和“求解的结果”（result of solving, Lösungsergebnis）。然而，为了避免过于繁琐，除非在少数重要场合下，一般地我将让读者自己从上下文中去判断“解”这个字的含义：它指的是对象呢，还是程序，是指工作的结果呢还是工作本身。[4)]

5.14 *已知量和未知量，假设和结论*。欧几里得原本有一个独特的前后一贯的风格，有些人认为这是严谨，也有些人认为这是故弄玄虚。它所有的命题都按照一个确定的模式表述，在措辞上，它把“求解问题”中的已知量和未知量，与“求证问题”中的假设和结论分别处理成是相似的，平行的。事实上，我们以后将会看到，这两类问题的这两个主要部分之间确有一定的相似性和平行性，这从解题者的观点去看，有一定重要性。然而，把已知量和假设混同起来或把未知量和结论混同起来，并把这些词用到类型不合适的问题上去，那是绝对不允许的。但是可悲的是这些重要词汇的滥用有时甚至在出版物中也会出现。

5.15 *计算一下数据个数*。一个三角形由三条边、或两边夹角，或者一边二角所确定，但不能由三个角确定。确定一个三角形要有三个独立数据（见习题1.43和1.44）。确定一个变量为 x 的 n 阶多项式需要 $n+1$ 个独立数据：多项

4）见HSI，p.202；旧词与新词，8。

式表达式中的$n+1$个系数，或是多项式在点$x=0$，1，2，…，n上（或在任何其它$n+1$个不同的点上）的值等等。有许多类重要的数学对象，为了确定它们，需要有一定数目的独立数据。因此，当我们解一个求解问题时，及早地计算一下数据个数常常是有好处的。

5.16 确定一个n边多边形，需要

$$(n-1)+(n-2)=(n-3)+n=3+2(n-3)=2n-3$$

个独立数据。上面同一数目的四个不同表达式告诉了你什么？

5.17 要确定一个底为n边多边形的棱锥需要几个数据？

5.18 要确定一个底为n边多边形的棱柱(可以是斜的)需要多少个数据？

5.19 要确定一个v个变数的n阶多项式需要多少个数据？（多项式的项具有形式，$cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_v^{m_v}$，其中$c$为常数而$m_1+m_2+\cdots+m_v\leqslant n$。）

第六章　扩大模型的范围

把你所考虑的每一个问题，按照可能和需要，分成若干部分，使它们更易于求解。

《笛卡儿全集》，第六卷，p.18，方法论。

笛卡儿的法则，在没有讲清楚分解的技巧之前，是很少有用的。如果把问题分成一些不合适的部分，只会增加没有经验的解题者的困难。

莱卜尼兹：《哲学著作集》，第四卷。p.331。

§6.1 扩大笛卡儿模型的范围

在笛卡儿的模型里有一套重要的想法，它们跟列方程并不一定有什么联系。本章将着手于阐发这套想法中的一些部分。我们将细致地从方程式过渡到更一般的概念。下面我们从一个例子开始，这个例子从有些方面来说是很一般的，但在另一些方面，它又是十分具体的，可以为以后的讨论提出方向。

(1) 有一个问题，已化为有四个未知量x_1，x_2，x_3和x_4及四个方程的方程组。这个方程组有一个特点，即并不是每一个方程都含有四个未知量。现在我们就想来强调一下这一特点：我们的符号将清楚地表出哪一个方程含有哪些未知量，而忽略掉其它的东西。现在把这四个方程写出如下：

$$r_1(x_1)=0$$
$$r_2(x_1,x_2,x_3)=0$$
$$r_3(x_1,x_2,x_3)=0$$
$$r_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$$

如上所示，第一方程只包含第一个未知量x_1，下面两个方程包含前三个未知量x_1，x_2和x_3，而只有第四个方程包含所有四个未知量。

根据这个情况，我们显然会提出以下解题方案：先由解x_1开始，它可以从第一个方程中求得。得出x_1的值以后，我们看出下两个方程就变成了只含x_2，x_3的方程组，从中即可确定出下两个未知量x_2和x_3。得出x_1，x_2和x_3以后，用第四个方程即可求出最后一个未知量x_4。

（2）我们设想上面考虑的方程组表示了一个问题的条件。这个条件分成了四个部分，而每一个单个方程都代表了整个条件的一部分（即条件的分款）：这个方程表达了所包含的未知量彼此之间以及它们和已知量之间，是怎样由条件中对应的那一部分（分款）所规定的关系联系起来的。此外条件还具有一个特点，即并非它的所有的分款都包含着全部的未知量。我们的符号清楚地表明了哪一个分款包含了哪些未知量。

当然，即使我们没有把那些条件的分款翻译成方程式，或者乾脆我们不可能把那些分款翻译成方程式，这时我们还是可以按照上述这样一个特殊的方式，去把条件分成若干个分款（每一个分款只包含特定的一组未知量）。我们也可以猜想，在上面(1)中大略谈过的那个解方程组的方案，在某种意义上说，对于那些未被代数方程表达出来或是不能用代数方程表达出来的条件的分款组来讲，也应该是成立的。

这席话为下面开辟新的可能性启示了广阔的前景。

（3）为了更清楚地看到这些可能性，我们必须重新解释一下我们的符号。

到目前为止，我们都是按照常规把符号$r(x_1, x_2, \cdots, x_n)$解释成未知量（自变量）x_1，x_2，…，x_n的一个代数表达式（或一个多项式，或一个函数）。因此，我们把

$$r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

解释为联系未知量x_1，x_2，…，x_n的一个（代数）方程。如果我们处理一个以x_1，x_2，…，x_n为未知量的问题，这样一个方程就表达了条件的一部分（一个条件分款），也即由条件所规定的未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与已知量之间的一个关系。

我们并不想推倒这个解释，但是我们要把它加以推广：在条件的分款没有被翻译成一个方程，或甚至x_1, x_2，…，x_n不是未知的数，而是任何类型的未知的事物的情况下，我们认为符号方程

$$r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

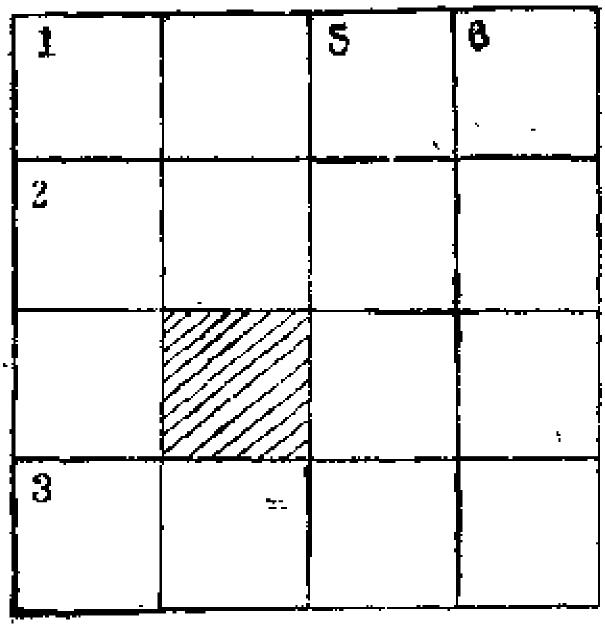
也表示了由问题的条件所决定的，包含了指定未知量（为方便计，我们把一般的未知事物统称为未知量）x_1, x_2，…，x^n的一个关系。我们也可以说，这样一个符号方程表达了条件的一部分（一个条件分款）。

要真正了解这个符号推广的范围，需要有一些例子。而要使我们确信这种推广是有用的则还需要更多的例子。

（4）纵横字谜*）的游戏能很恰当地说明我们刚才引进的

*）crossward puzzle是在一个正方形或长方形内的许多小格里，按纵横方向填入（满足一定条件的）适当的英文字的填字游戏。

符号。我们来看一个（小型的）例子。*）



谜面（线索）

从左到右

1.晴朗天空的颜色。
(The colour of the sky on a fine day.)

2.不难。
(not difficult.)

3.史蒂文生看见风把风筝——高空。
(Stevenson saw the wind——the kites on hight.)

从上到下

4.好，较好，——。
(Good, better, ——。)

5.赫伯吃饭时——刀和叉。
(Hob——a knife and fork when he eats.)

6.我们用——去看。
(We see with——.)

*）本例选自《基础英语》（Essential English for Foreign Students）第二册，p.82。

在纵横字谜游戏中，未知量是字。设x_1，x_2，…，x_6是我们这个字谜里的六个未知的英文字。x_1和x_4这两个字的第一个字母都在标以1的方格里。但x_1是从左到右水平地去读，而x_4则应从上到下铅直地去读。对于$n=2,3,5$和6，英文字x_n的第一个字母应该在标以n的方格里。如果要把蕴含在这个方块图（由一些标有数字或没有标数字的，黑的或白的小方格组成）里的条件刻板地都写出来，我们便可以得出具有21个条件的条件组。

首先，谜面（给定的“线索”）表示了六个最明显的条件。我们用

$$r_1(x_1)=0,\ r_2(x_2)=0,\ \cdots,\ r_6(x_6)=0$$

去表示它们。例如，符号方程$r_1(x_1)=0$表示的条件是说英文字x_1的字义是指一种颜色；而$r_6(x_6)=0$是要求用一个英文字去填充“我们用——去看”这一断缺的句子，等等。

从图上还可以看到，还有六个条件是表示这六个未知的英文字的长度（所含字母个数）的：

$$r_7(x_1)=0,\ r_8(x_2)=0,\cdots,r_{12}(x_6)=0$$

例如，$r_7(x_1)=0$就表示英文字x_1的长度，显然在现在这个情况下，x_1，x_2，…，x_6都应是由四个字母拼成的字。

图形还告诉我们某一个字和另一个字在哪里交叉，于是又可以得到九个条件：

$$r_{13}(x_1,x_4)=0,\ r_{14}(x_1,x_5)=0,\ r_{15}(x_1,x_6)=0$$

$$r_{16}(x_2,x_4)=0,\ r_{17}(x_2,x_5)=0,\ r_{18}(x_2,x_6)=0$$

$$r_{19}(x_3,x_4)=0,\ r_{20}(x_3,x_5)=0,\ r_{21}(x_3,x_6)=0$$

例如，符号方程$r_{14}(x_1,x_5)=0$表示英文字x_1的第三个字母就是英文字x_5的第一个字母，又如$r_{17}(x_2,x_6)=0$表示英文

字x_2的第三个字母就是英文字x_5的第二个字母，等等。

现在我们已列出了全部的条件，它们的总数等于

$$6+6+9=21$$

（5）一般地，如果问题包含有n个未知量，而且条件已经分成了l个不同的部分（条件分款），则我们得到一组联系n个未知量的l个关系式，它们可以通过下列联系这n个未知量的l个符号方程来表示：

$$r_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$
$$r_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$r_l(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

在第二章中我们已讨论了特殊的情形，在那里未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$都是未知数，方程也不光是符号的，而是实在的代数方程，并且$l=n$。在本章里，我们经常考虑的将是一些类似于(1)和(2)中讨论过的那种特殊情形，也即并非一切条件分款都包含着全部未知量的情形。

（6）可能会发生这样的事，即两个问题可用同一组符号方程来表示。这样的问题所涉及的也许是非常不同的事情，但它们有共同之处：他们在某些(比较抽象的)方面是彼此相似的，我们可以把它们归为同一类。按照这种办法我们可以得到一个新的，更为单纯的问题（求解的问题）的分类法。这个分类法对我们的研究有什么好处吗？如果两个问题可用同一组符号方程表示，有一个可同时适用于它们的解题程序吗？

我想，这是一个很好的问题。虽然话说得太一般了不见得一定很有用，但它会有助于我们了解将要讨论的一些特殊情形。

§6.2 扩大双轨迹模型的范围

在上节中，我们已经勾画出了一个非常一般的画面。怎样才能把我们前面所学的东西纳入这个画面呢？怎样才能把我们最先接触的那个双轨迹模型纳入这个画面呢？

(1) 如果我们扩大一下术语的含义，就可以给出清楚的回答。

在处理几何作图问题时，我们提到过“轨迹”。这个轨迹实际上就是一些点的集合。下面我们将轨迹一词的含义加以推广，把一个以特定的方式出现在问题求解中（见下面的例子）的集合称为是一条轨迹。“集合”这个词已经有了那末多的同义词（一类对象，一堆东西，个体的综合，一个范畴等等，见习题1.51），因此再要说点什么就成为画蛇添足了。“轨迹”这个词，可以引起我们在求解初等几何问题上的许多回忆，因而当我们下面去处理其他一些比较难的问题时，借助于类比，它也许会启发我们去想出一些有用的步骤来。

(2) *平面上一个点的双轨迹*。我们回到本书最初讨论过的第一个例子：*给定三边，求作一三角形*。

让我们回顾一下这个熟悉的解法（§1.2）。先作出一条边 a，这样便固定了所求三角形的两个顶点 B 和 C。剩下来还要求一个顶点，把未知量的第三个顶点记作 x。条件要求 x 必须满足下述两款：

(r_1) 点 x 到给定顶点 C 的距离为 b，

(r_2) 点 x 到给定顶点 B 的距离为 c。

利用§6.1引进的符号，我们可以把这两个条件 (r_1) 和

(r_2)写成两个符号方程：

$$r_1(x)=0$$

$$r_2(x)=0$$

满足第一个条件(r_1)（第一个符号方程）的点布满了一个圆周（圆心为C，半径为b）。这个圆周就是由所有满足条件(r_1)的点组成的集合或轨迹。满足第二个条件(r_2)（第二个符号方程）的点的轨迹是另一个圆周。于是，所提问题的解——点x应当同时满足这两个条件，它必须同时属于这两个轨迹。因此，这两个轨迹的交点就是所提问题的解集合。这个集合包含两个点，所以有两个解，即关于BC边彼此对称的两个三角形。

(3) 空间中一个点的三轨迹。下面我们来考虑一个立体几何问题，它是我们在(2)中刚刚讨论过的简单平面几何问题的类比：给定六个棱，求一四面体。运用我们刚才在(2)中提到的步骤，我们先作四面体的底，它是一个由给定的三个棱围成的三角形。作出底之后，我们就得到四面体的三个顶点，记为A，B和C。剩下来还要求一个顶点，把未知的第四个顶点记为x，x到已经确定下来的三个顶点的距离分别是a，b和c。条件要求点x满足下述三款：

(r_1) x到点A的距离为a，

(r_2) x到点B的距离为b，

(r_3) x到点C的距离为c。

利用§6.1中引进的符号，我们把这三个条件(r_1)，(r_2)和(r_3)写成三个符号方程

$$r_1(x)=0$$

$$r_2(x)=0$$

$$r_3(x)=0$$

满足第一个条件(r_1)(第一个符号方程)的点 x 布满了一个球面（球心为 A，半径为 a)。这个球面就是由所有满足条件(r_1)的点组成的集合或轨迹。另外两个条件的每一个也都对应一个球面，它就是满足那个条件的点的轨迹。于是，所提的关于四面体的问题的解——点 x 应当同时满足三个条件，它必须同时属于这三个轨迹。因此，这三个轨迹（三个球面)的交点就是所提问题的解集合。这个集合包含两个点，所以有两个解，即关于三角形 ABC 所在的平面彼此对称的两个四面体。

（4）一般对象的轨迹。(2)和(3)中讨论过的例子也许会使我们想起第一章中解过的属于这同一模型的其它问题。在这些例子的背后，我们可以看到一般的情形。

问题的未知量是 x。问题的条件分成 l 个分款，我们用有 l 个符号方程的方程组来表示：

$$r_1(x)=0,\ r_2(x)=0,\ \cdots,\ r_l(x)=0$$

满足第一个条件分款（由第一个符号方程表示）的对象 x 组成一个确定的集合，我们称之为第一条轨迹。满足第二个分款的对象组成第二条轨迹，…，满足最后一个分款的对象组成第 l 条轨迹。所提问题的解——对象 x 必须满足全部条件，即所有 l 个条件分款，因此它必须属于所有这 l 条轨迹。另一方面，任何一个对象 x 如果同时属于 l 条轨迹，即同时满足 l 个条件分款，它就是所提问题的一个解。简言之，这 l 条轨迹的交组成了解集合，即满足所提问题的条件的全部点的集合。

以上讨论大大推广了双轨迹模型，它提示了一个能适用

于无数多种情形，能行之于几乎一切问题求解的方案：首先，把条件分成适当的分款，然后作出对应于各个分款的轨迹，最后，找出这些轨迹的交，由此得出问题的解。在评价这一方案之前，让我们先考虑一些具体例子。

（5）一条直线的双轨迹。给定 r，h_a和 α，求作一三角形。

读者应当记得在第一章中所用的符号：r 表示三角形内切圆的半径，h_a 表示边 a 上的高，α 表示边 a 的对角。

这个问题并不那末容易，但开头的几步却是比较明显的。你能解出问题的一部分吗？我们可以很容易地画出所求图形的一部分：一个半径为 r 的圆和它的两条夹角是 α的切线。（请注意，过两切点的两个半径间的夹角为$180°-\alpha$。）角 α 的顶点即所求三角形的顶点A。于是问题归结为作一条（无限）直线，使得A所对的边就是它上面的一个线段。在我们已经作出了上述一部分图形之后，这条所要求的直线就是我们的未知量，记为x。

直线x 所要满足的条件由两个分款组成：

（r_1）x是已作出的半径为 r 的圆的切线，

（r_2）x 到给定点A的距离为定值 h_a。

x 的第一条轨迹是半径为 r 的圆的切线集合。

x 的第二条轨迹是圆心为A半径为 h_a 的圆的切线集合。

两条轨迹的交由此两圆的公共切线组成，我们可以作出这些切线；见§1.6(1)和习题1.32。

（事实上，只有外公切线的情形能够解答所提出的问题；因为内公切线或者是不存在的，而当它存在时，半径为 r 的圆不是它的内切圆而是它的旁切圆。）

把两个圆的公切线当作是直线的双轨迹的交是一个有用的看法；如果我们把一些类似的情形也包括进来（特别是对其中一个圆退化为一个点的极端情形），则这种看法就更有价值了。

(6) 一个立体的三轨迹。设计一个“三用塞子”，使得它恰好能塞进三个不同的孔：一个是圆的，一个是方的，还有一个是三角形的。

其中圆的直径，正方形的边和等腰三角形的底及高都彼此相等，见图6.1。

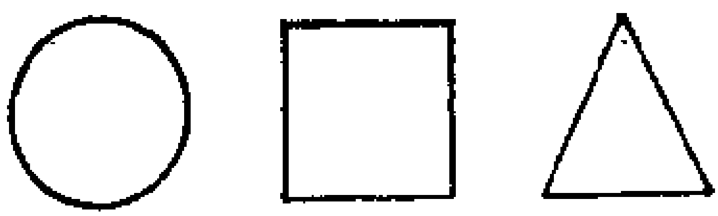


图6.1 三用塞子的三个孔。

上述问题，若用几何的话来说，就是所求立体的三个正交投影应该与给定的三个图形重合。我们假定这三个投影的方向互相垂直（事实上，这个假定对问题作了一些限制）。我们的未知量是一个立体，记为x。问题的条件由三个分款组成：

(r_1) x 在地板上的投影是一个圆，

(r_2) x 在正面墙上的投影是一个正方形，

(r_3) x 在侧面墙上的投影是一个等腰三角形。

这个意思就是说，我们把这个立体放在一个长方体的房间里，所以这些投影是正交的，三个图形的大小(见图6.1)在上面的说明中已经交代了。

让我们考察第一个轨迹，即满足条件(r_1)的立体的集

合。将给定的圆放在地板上。考虑任何一条通过圆面积的无限垂直直线，称为一根“纤维”。这些纤维构成一个无限的圆柱，所给的圆是它的一个横截面。如果立体 x 包含在此圆柱内，并至少含有每根纤维的一个点，那末 x 就满足第一个分款(r_1)。所有这种立体组成的集合就是第一条轨迹。

正象第一条轨迹是一个无限铅直圆柱一样，其他两个轨迹分别是两个无限水平棱柱。对应于(r_2)的棱柱的横截面是一个正方形，如果这个棱柱是南北走向的，那末对应于(r_3)（横截面为三角形）的棱柱就是东西走向的，见图6.2。

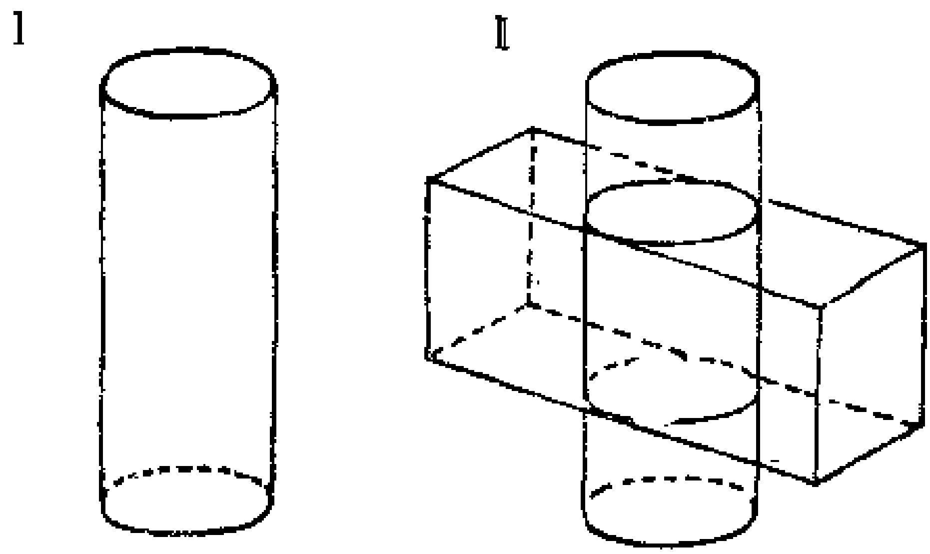
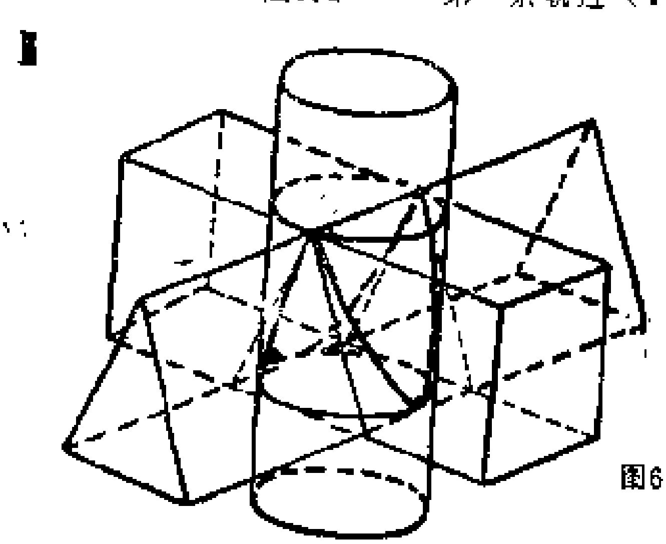


图6.2 （Ⅰ）第一条轨迹（Ⅱ）前两条轨迹（Ⅲ）三条轨迹



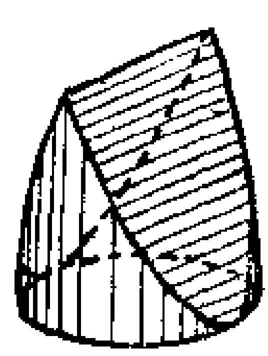


图6.3 最好的三用塞子

任何同时属于这三条轨迹的立体，就是我们问题的解，即一个"三用塞子"。此类立体中体积最大的一个是三个无限图形——一个圆柱和两个棱柱的交。其形状见图6.3。

（为什么是体积最大的那一个呢？试描绘这个立体表面的各个不同部分。试求此问题的其它解。）

（7）一个字的双轨迹。在一个允许有双关语和字母可以重排的字谜里，给出的谜面（线索）是：

"rash aye（七个字母的字）的字形是没有根据的。"
[This form of rash aye is no proof(7 letters)]

这是一个有缺陷的短句。它似乎是这个意思："如果你肯定得太快，那就什么也没有证明。"*）不过，我们怀疑，把某些牵强附会的意思弄到解字谜的谜面（线索）里去是不是反而会把我们引入歧途。这里也许有一条更好的路：即应该把"…的字形"理解成"…字的重排"。因此我们可以试着把这个谜面（线索）照下面的办法去解释。

未知量 x 是一个字。条件由下面两部分组成：

（r_1）x 是七个字母RASHAYE的一个重排；

（r_2）"x 是没有根据的"是一个有意义的（或者是常用的）短语。

让我们来分析一下这个解释。字谜的条件简明地分成了两个分款：（r_1）是关于这个字的拼法，（r_2）是它的意思。每一个分款都对应着一条"轨迹"，但是这些轨迹并不象前面例子里的轨迹那样好办。

第一条轨迹是十分清楚的，我们可以把七个字母

A A E Y H R S

*）rash aye 的中文意思是"轻率的赞同"。

按2520种不同的方法去排（读者现在不必去验证这个数是怎样推导出来的，实际上它就是$\frac{7!}{2!}$），如果一定需要的话，我们可以把这七个字母的2520种不同的（既没有重复的，也没有漏掉的）排法全部写出来，这就把条件(r_1)所允许的可能情形全部列出来了，也就是说，把(r_1)对应的轨迹完整地描述或者构造出来了。然而这实在是太麻烦和太浪费了（许多元音和辅音的胡乱排列在英文里是不允许的）。而且，这种把一切情形都机械地列出来并不是我们的目的，它不符合这个游戏的精神。因此，如果不是从原理上而是从实践上去看的话，对应于(r_1)的这个轨迹是不好表示的，是难以处理的。

对应于分款(r_2)的轨迹不止是不好表示出来，而且还是含糊不清的。如果英文字x已经有了，短语"x是没有根据的"有意义吗？它是一个常用的短语吗？在许多情形下，回答是成问题的。

因此，根据不同的理由，两个轨迹中的任何一个都是不好处理的，都没法顺利地描述和构造出来。当然就更谈不到有什么确定的步骤去找这两个轨迹的交了。但是，把整个条件分成两个不同的分款，而所求的字必须同时满足它们，这种作法仍然是有裨益的。先集中注意于条件的一个分款，然后是另一个，考虑几乎所有满足一个分款（或是另一个）的字，从这个方向试一下，再从那个方向试一下，把我们记忆里库存的所有字和短语都翻腾翻腾，最后要找的这个字就会显现出来。（参阅习题6.9。）

（我们这里强调了两个分款(r_1)和(r_2)中没有一个是容易处理的——这一点对评价我们所考虑的这个一般方案是必

要的。然而，实际上，两个分款中总有一个要比另一个容易处理些——这对于解决我们手头的难题也许是有价值的。）

§6.3 从哪一个分款着手

在上节里我们所讨论过的各种类型的问题都是按同一个数学模型（我们称为“l个轨迹的模型”）去求解的。不过我们还剩下一个没有解，即§6.2最后(7)里那个问题。困难是什么呢？我们已经把条件成功地分解成两个简洁的分款，但我们没法处理对应于这些分款的轨迹；我们不能把这些轨迹全部列举或顺利描绘出来，因此作不出它们的交。

有时候我们遇见一些情形，虽然也有这种困难，但还没有到极端的程度，对这种情形我们也许能够想出办法去处理它们。

(1) 一个字的双轨迹。在一个允许双关语和字母可以重排的字谜里，谜面（即线索）是：

“两边都是平的（五个字母）”[Flat both ways (5 letters).]

在作过一些尝试以后，我们会导致下面这个解释：未知量是一个字x。条件由两个分款组成：

(r_1) x的字义是“平的”(flat)，

(r_2) x有五个字母，把它倒过来念也还是“平的”意思。

我们从哪一个分款开始着手呢？这里是有差别的。要有效地去处理分款(r_2)，你就必须在你脑子里开列一串五个字组成的字的单子，其中每一个字倒过来念意思都是一样的。我想我们几乎没有人脑子里存着这样一个单子。但是我们中多数人却都能回忆起一些或多或少含有“平”这个意思的字。我

们应该当它们在脑海里浮现出来时检验它们是否还满足分款(r_2)。下面就是这样一些字：

even（平等的），smooth(平滑的),unbroken--plain（平整的，平易的），dull—horizontal（平庸的，水平的），当然还有level（平的）！[1]

（2）让我们试着分析一下前面这个求解过程中的最本质的东西。

分款(r_1)从全部字这个大范围里挑选出一个小的字集合来，其中有一个就是谜底（解）。分款(r_2)做的是同一件事，不过这里有一个差别：这种挑选对一种情况来说要比另一种情况来得容易些。在这里我们处理(r_1)要比(r_2)更有办法些。我们是先用了较容易处理的分款来作第一次选择，然后再用较难处理的分款去作第二次选择。作好第一次选择是比较重要的：我们第一次是从全体字这个庞大的容器里去挑选元素，而第二次是从第一次选得的那个大大限制了的轨迹里去挑选元素。

这里寓意是简单的；每一个分款都对应一条轨迹。我们应当先从能较完整或较快地得到的那个轨迹开始着手。这样做，你就可以避免把所有对应于其他分款的那些轨迹都作出来：因为你只要在第一条轨迹里再用其他那些分款去挑选元素就行了。

（3）一个三元未知量的双轨迹。船长有多大年纪？他有几个孩子？他的船有多长？我们只知道这三个所要求的整数的乘积是32118。船的长度用呎表示(即若干呎)，船长有若

1）HSI，分解和重新组合8，pp.83—84，那里也有一个十分类似的例子，而且也考虑到了本节那个重要的思想。

干个(大于1)儿子和若干个(大于1)女儿，他的年龄比他的孩子数要大，但他还不到100岁。

这个题目要找的是三个数字，令

$$x \qquad\qquad y \qquad\qquad z$$

分别表示船长的

孩子数　　　　年龄　　　　船的长度

把问题想象成下面这样是有好处的：即我们只有一个未知量，它不是一个数而是一个三元未知量，一个三元数组(x, y, z)。

把问题叙述里所提出的条件分解成合适的一些分款是一件十分重要的事。这需要对问题的一些细节和条件所有可能的重新组合作周密的考虑。在经过若干尝试（为了节约篇幅我们跳过这些）以后，我们得到下列两个分款：

(r_1) x，y和z都是大于1的正数，且

$$xyz = 32118$$

(r_2) $$4 \leqslant x < y < 100$$

我们先从两个分款的哪一个着手呢？当然是从(r_1)先开始，因为它只有有限多种可能性，而(r_2)对z一点限制也没有，所以会有无穷多种情况。

于是我们来分析(r_1)。32118可以被6除尽，因而很容易把它分解成素数因子的乘积：

$$32118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101$$

为了把它写成三个因子的乘积，我们必须把四个素数中的两个并成一个。于是只有六种不同的分解方法，使得32118可以写成三个都不等于1的因子的乘积：

$$6 \times 53 \times 101$$

$$3 \times 101 \times 106$$

$$3\times 53\times 202$$

$$2\times 101\times 159$$

$$2\times 53\times 303$$

$$2\times 3\times 5353$$

在这六种可能性中，只有第一个是满足分款(r_2)的，因此我们得出

$$x=6,\ \ y=53,\ \ z=101$$

船长有六个孩子，他有53岁，他的船长为101呎。

在这个简单智力问题的解法中，那个关键的想法（它即使对于比较复杂的题目也是经常可以使用的）是：从整个条件中分离出一个"主要的"分款来，它的存在只有少数几个可能性，然后再利用剩下的那些"次要的"分款在这些可能性中去进行挑选[2]。

*(4) 一个函数的双轨迹。有一类在物理和工程技术中每天都要遇到的十分重要的数学问题，它的条件很自然地分成两个分款：由微分方程和初始或边界条件去确定一个函数。下面是一个简单的例子：未知量 x 是自变量 t 的一个函数，我们要求它满足

(r_1)微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,t)$，其中$f(x,t)$是一个给定的函数，

(r_2)初始条件，当$t=0$时，$x=1$，$\frac{dx}{dt}=0$。

我们是从微分方程着手呢还是从初始条件着手？这依赖于给定函数$f(x,\ t)$的性质。

---

2) 参见习题2.69，2.70和2.71。

第一种情形。取$f(x, t)=-x$，则微分方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x$$

这个微分方程属于少数几个可初等求解的特殊类型中的一个，它的“通解”能明确写出来。实际上，满足微分方程的函数的最一般形式是：

$$x=A\cos t+B\sin t$$

这里A和B是任意常数（积分常数），这样我们便得到了对应于分款(r_1)的“轨迹”。

现在转向分款(r_2)，我们利用它从刚才得出的第一条轨迹里把所要的解挑出来：在x和$\frac{dx}{dt}$的表达式中令$t=0$，则由初始条件便得

$$A=1, \quad B=0$$

$$x=\cos t$$

第二种情形。假定我们研究了微分方程，但并未找出它的通解（或是它的任何解），我们决定不再在这方面努力了。那末，下一步我们该怎么办呢？我们应该从分款(r_1)和(r_2)中的哪一个着手呢？

在这种情况下，我们可以先用(r_2)：我们设x是一个t的幂级数，它的最初的系数可以由初始条件决定，剩下的那些系数u_2，u_3，u_4，…暂时还是不确定的（事实上，它们就是我们的未知量，见习题3.81）。于是有：

$$x=1+u_2t^2+u_3t^3+u_4t^4+\cdots$$

这样，从某种意义上讲，对应于分款(r_2)的轨迹就已经得出来了。我们再转向第一个分款(r_1)，由微分方程去确定剩下的系数u_2，u_3，u_4，…（如果可能的话，利用递归的方法，

见习题3.81）。

请注意，在任何情况下，微分方程都比初始条件要“挑剔”得更厉害些（即大大限制了被选择函数的范围）。因为分款(r_2)只确定幂级数的两个系数；而微分方程(条件(r_1))则必须确定剩下的那无穷多个系数。上面这个情况表明了从限制得厉害的分款着手并不总是最好的。

§6.4 扩大递归模型的范围

上一节我们已经注意到了条件的各个分款之间的一个重要的区别：我们有理由（有时甚至是很强的理由）认为从某一个分款着手要比从另一个分款着手来得更好些。当然，这里还有些限制，因为我们迄今考虑的仅是一个未知量的情形（但这并不是一个真正的限制，关于这一点请参考§5.5的讨论）。下面就让我们来考虑多个未知量的情形。

(1) 第三章里考虑过的几个例子给我们提示了一个重要的一般情形。设n个未知量$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$满足下列$n$个条件：

$$r_1(x_1)=0$$
$$r_2(x_1,\ x_2)=0$$
$$r_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$r_n(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)=0$$

这个特殊的n个关系组不仅告诉我们应该从哪里着手，而且还告诉我们底下该怎样继续做下去。实际上，它提出了一个完整的解题方案：首先从x_1开始，它可以由第一个关系式去确定。得到x_1以后，从第二个关系式便可以确定x_2。得到x_1

和x_2以后，从第三个关系式又可以确定x_3，如此下去：每次都按次序确定未知量x_1，x_2，…，x_n中的一个，利用已经得到的那些未知量的值就可以确定下一个未知量的值。只要第r_k个关系式是方程

$$r_k(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k)=0$$

则这一方案就一直可以顺利进行下去，因为我们都可以把x_k用x_1，x_2，…，x_{k-1}表示出来，（对$k=1$，2，…，n）。如果第k个方程关于x_k是线性的（当然，x_k的系数应当不等于0），情况就变得特别顺利。

这就是递归的模型：即用递归的方法，或者说借助于前面已经得到的x_1，x_2，…，x_{k-1}去确定x_k。

根据这个模型，我们可以简单地一步一步朝前走，从x_1开始，解得x_1后去求x_2，解得x_2后就去求x_3，这样一直做下去看上去是最明显和最自然不过了。每走一步我们都必须涉及前面各步累积所得到的结果，这或许就是这一模型最重要的特征。这一点在讨论过几个例子之后，我们就会领会得更清楚了。

（2）在§2.5(3)中我们曾得到一个七个未知量七个方程的方程组，让我们把未知量改记成

$$D=x_7$$

$$a=x_4 \qquad b=x_5 \qquad c=x_6$$

$$p=x_1 \qquad q=x_2 \qquad r=x_3$$

再把方程组重新写一下，清楚地表示出每一个方程式是通过哪几个未知量联系起来的，而把其他的细微末节忽略掉，同时把这些方程编上号，使得它们的求解顺序从编号上就能清楚地看出来。

这样我们便得到下面这组关系式：

$$r_1(x_2,\ x_3)=0$$
$$r_2(x_3,\ x_1)=0$$
$$r_3(x_1,\ x_2)=0$$
$$r_4(x_2,\ x_3,\ x_4)=0$$
$$r_5(x_3,\ x_1,\ x_5)=0$$
$$r_6(x_1,\ x_2,\ x_6)=0$$
$$r_7(x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7)=0$$

方程组的这个写法本身，就提供了一个明显的解题方案：我们先把前三个方程分离出来，它们只含有前三个未知量x_1，x_2和x_3，因此可以看成是这三个未知量的三个方程的方程组（事实上，我们可以很容易地从§2.5(3)的三个方程——即这里的前三个关系式——里把$x_1=p$，$x_2=q$，$x_3=r$解出来）。一旦解出了前三个未知量x_1，x_2，x_3，方程组就“变成是递归的”了：我们可以逐个地从第4、第5、第6个方程里分别解出x_4，x_5，x_6（事实上，这三个未知量的求解前后次序是无关紧要的）。解出x_4，x_5，x_6以后，利用最后一个关系式就可以得到x_7（它是原来问题里的主要未知量，其它都只是辅助未知量，见§2.5(3)）。

读者应该把刚才讨论过的方程组与§6.1(1)里考虑的方程组比较一下。

(3) 解方程

$$(he)^2=she$$

当然，这里he和she指的都是按通常十进制符号表示的数（正整数）。前一个是两位数，另一个是三位数，h，e和s都是个位数。为不致混淆，把问题重新表示如下：求满足方程

$$(10h+e)^2=100s+10h+e$$

的 h，e 和 s。其中 h，e 和 s 都是正整数，且 $1\leqslant h\leqslant 9$，$0\leqslant e\leqslant 9$，$1\leqslant s\leqslant 9$。

这道小小智力题并不困难。如果读者能自己解出来，他就对下面提供的解题方案会有更好的体会。在下面的求解过程中，第一步我们只考虑一个未知数，第二步我们再多加进一个未知数，即同时考虑两个未知数，只在最后一步才同时处理三个未知数（下面把每一步简记为阶段）：

阶段(e)。由于对 e 有一个单独的要求，即 e^2 的最后一位必须是 e，所以我们先从 e 开始。我们把十个一位数的平方都写出来，

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$$

发现只有四个是符合这个要求的，所以

$$e=0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 5 \text{ 或 } 6$$

阶段(e，h)。这里有一个条件只涉及三个一位数中的 e 和 h，即：

$$100\leqslant(he)^2<1000$$

因此容易得出

$$10\leqslant he\leqslant 31$$

把这个不等式与上面(e)里考虑的结果联系起来，我们便发现两位数 he 必须是下面十个数中的一个

10，11，15，16

20，21，25，26

30，31

阶段(e，h，s)。现把上面这十个数的平方都列出来

$$100,\ 121,\ 225,\ 256$$

$$400,\ 441,\ 625,\ 676$$

$$900,\ 961$$

我们发现只有一个是满足所有条件的。因此

$$e=5,\ h=2,\ s=6$$

$$(25)^2=625$$

(4) 在上面(3)这一小段里，我们把所提问题的条件分成三个分款，它们可以用有三个符号方程的组（利用§6.1里的符号）来表示：

$$r_1(e)=0$$

$$r_2(e,\ h)=0$$

$$r_3(e,\ h,\ s)=0$$

让我们把这三个分款的组与下面三个线性方程的组比较一下：

$$a_1x_1=b_1$$

$$a_2x_1+a_3x_2=b_2$$

$$a_4x_1+a_5x_2+a_6x_3=b_3$$

其中x_1，x_2，x_3是未知量，a_1，a_2，…，a_6，b_1，…，b_3是给定的数，而且假定a_1，a_3和a_6都不等于0。

这两个组的相似之处比起它们的不同之处要明显得多，让我们再仔细地把它们比较一下。

我们先看x_1，x_2和x_3的这个线性方程组，第一个方程就完全确定了第一个未知量x_1，因为后面那些方程无法影响或改变由第一个方程得到的x_1的值。利用x_1的这个值，第二个方程就完全确定了第二个未知量x_2。

未知量e，h和s满足的那三个分款形式上与x_1，x_2，

x_3的三个方程相似，但本质上却不同。第一个分款并不能完全确定第一个未知数e，它只是限制了e的选择范围，即生成e的一条轨迹（这是最恰当的解释）。类似地，第二个分款也不能完全确定第二个未知量h；它生成二元未知量(e, h)的一条轨迹。只有最后一个分款才把e，h和s完全确定下来：它从前面得到的轨迹里把同时满足所有这些条件的那个唯一的三元未知量(e, h, s)挑了出来。

§6.5 未知量的逐步征服

考虑n个数值的未知量x_1，x_2，…，x_n，我们可以把它们看成是一个多元未知量x的按次序排列的分量（参见§5.5）。在本节，我们假定这n个未知量是从一个递归的方程（象我们在§6.4(1)里考虑的那样）依次定出来的。解法的递归过程把我们的多元未知量x逐步地揭示出来。开始我们对未知量x知道得很少——我们只知道它的一个分量x_1的值，但是我们可以利用最初得到的这点知识去得出更多的知识：把关于第二个分量x_2的知识跟关于第一个分量x_1的知识合在一起。在解题的每一阶段，我们都把关于一个新的分量的知识加到已经得到知识上去，在每一阶段，我们又都要用已经得到的知识去得出更多的知识。我们要靠逐省逐省的占领去最后征服一个王国。在每个阶段，我们利用已被征服了的省份作为行动基地去征服下一个省份。

前面我们已经见到了一些这一程序或多或少有了改动的例子。比如说，不一定每次都恰好征服一个省份；而有时又可能大获全胜，一次就征服了两三个省份，参见§6.4(2)和§6.1(1)。有时一个省份在一次打击下也可能没有完全被征

服；先是一个省份以后又有另外一些省份只是部分地被征服，只有最后决定性的一战，才把它们全都征服了。参见§6.4(3)。

我们过去可能还碰到过这个程序的其他形式。例如在§2.7中，就曾碰到过一些特殊的扩张型模型，给我们以很深的印象。又如果未知量有很多分量（例如在纵横字谜的问题里），我们就可以沿着几条思路同时去进行：我们不必拘泥于用一根线去穿所有的珠子，而可以用好几根线去穿。这里本质的东西是运用已经收集到的知识作为行动的基础去收集更多的知识。从这个意义上，也许我们可以这样说，所有研究和解决问题的合理的程序都是递归的。

第六章的习题与评注

6.1 具有许多分款的一个条件。在 n 行的幻方里，n^2 个数字是这样排列的：它的每一行的数字之和、每一列的数字之和以及两对角线的每一条上的数字之和都相同，这个和数就称为“幻方常数”。最简单的熟知的幻方是前九个自然数 1，2，…，9 填充起来的三行幻方。现在让我们来详细地谈一下这个填充简单幻方的问题。

什么是未知量？有九个未知量，令 x_{ik} 表示居于第 i 行第 k 列的所求的未知量，i，$k=1$，2，3。

什么是条件？这个条件共具有四个不同类型的分款：

（1）x_{ik} 是一个整数

（2）$1 \leqslant x_{ik} \leqslant 9$

（3）$x_{ik} \neq x_{jl}$　除非 $i=j$ 和 $k=i$

（4）$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}=x_{11}+x_{22}+x_{33}$　　对 $i=1,2,3$

$x_{1k}+x_{2k}+x_{3k}=x_{11}+x_{22}+x_{33}$　　对 $k=1,2,3$

$x_{13}+x_{22}+x_{31}=x_{11}+x_{22}+x_{33}$

说明每一种类的分款的数目和所有分款的总数，这些分款具有§6.1(3)的记号中的哪一种形式？

6.2 引进一个多元未知量把在§6.1(5)中考虑的一般关系组化为在§6.2(4)（显然更为特殊）的关系组。

6.3 引进一个多元未知量，把在§6.1(1)中考虑的方程组化为在§6.4(1)中所考虑的关系组的一种特例。

6.4 用习题6.3的方式简化在§6.4(2)中考虑的方程组。

6.5 规划一个方案解下述方程组

$$r_1(x_1, x_2, x_3)=0$$
$$r_2(x_1, x_2, x_3)=0$$
$$r_3(x_1, x_2, x_3)=0$$
$$r_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$
$$r_5(x_1, x_2, x_3, x_5)=0$$
$$r_6(x_1, x_2, x_3, x_6)=0$$
$$r_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)=0$$

6.6 关系组

$$r_1(x_1)=0$$
$$r_2(x_1, x_2)=0$$
$$r_3(x_2, x_3)=0$$
$$r_4(x_3, x_4)=0$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_n(x_{n-1}, x_n)=0$$

是课文里所考虑过的关系组中一个特别有趣的特款，是哪一个关系组？

你以前曾见过它吗？你在什么地方曾有机会去比较两个彼此类似的关系组？

6.7 过圆内一定点作一条定长的弦。

把这个问题归类。

6.8 平面上给定两条直线a、b及一个点c的位置，此外，又给定一个线段长l。试作一条过点c的直线x，使得由直线a、b和x作成的三角形的周长等于定长l。

把这个问题归类。

6.9 保留一部分条件。在§6.2(7)考虑的问题的两个分款中，(r_1)似乎更难办些：在试图满足这个要求时，就能规划出某种方案。为了解出一个由一组给定字母（例如RAS-HAYE）组成的字谜，我们需要去找出这样一个字，它仅由这一组给定的字母组成，并且包含所有这些字母。下述的求解步骤也许是可行的：把条件的后一部分"并且包含所有这些字母"暂且搁下，先试着去寻求由这组给定字母组成的字，或常用的字根、字首及字尾。这类的短字是容易拼得的，进一步再找出长一些的，最后也许有可能解得所求的字谜。在上述给定情形下，我们可以想到以下的字：

ASH, YES, SAY, SHY, RYE, EAR

HEAR, HARE, AREA

SHARE

RE-（前缀）

-ER, -AY, -EY（后缀）

为了解出§6.2(7)的问题，我们在考察这堆字时，脑子里不光是想着字谜或分款(r_1)，并且也想着(r_2)。这堆字里的某些部分可以组合成为一个谜底—— 但象SHYAREA，就不是一个解。

6.10 阿里阿德涅的线团*)。弥诺斯国王的公主阿里阿德涅爱上了忒修斯，并给了他一个线团，当他进入迷宫时，他解开了这个线团，并且顺着线找到了摆脱歧途的归路。

是古代的启蒙天使编出了这一神话吗？它多么惊人地启示了某一类问题的本质！

*) 故事见《希腊的神话和传说》。

在求解问题的过程中，我们常常会陷入困境，我们会感到我们已经走到了最后一步，前面已经无路可走了。而迷宫的故事则提供了另一类的问题，在那里每到一点前面都有许多路可走，困难却成了如何在它们中间进行选择。为了去掌握这样一种问题（或者当我们已经掌握了这种问题为了要把它的解法表示出来）我们应当依次地采取一些最适当和最省使的顺序去处理各种所涉及的论题：每当有两种可能性呈现出来时，我们就应当根据怎样能使我们从前面已做的工作中，得到最大帮助这一原则，来选定接下来的一个论题。“阿里阿德涅的线团”的故事有力地启示了“十字路口的最好选择”。（顺便提一下，这是莱卜尼兹很得意的一句话。）

包含着若干个未知量、若干个互相关联的任务和条件的问题，就常常具有迷宫的性质。纵横字谜和错综复杂的几何作图就可以很好的说明这一点。在解决这种问题时，每一步我们都要作出选择：下一步我们应当转向哪儿？（考虑哪一个字？作哪一部分图形？）开始时，我们应当去找出最薄弱的环节，找出最容易入手的分款，找出字谜中最易于求得的字或看出图形中最易于作出的部分。在找出了第一个字或作出了第一部分图形以后，我们就应当小心地去选择第二步：确定该去找哪个字（或哪部分图形），这个字应当使得已找到的第一个字（或第一部分图形）能起最大的帮助作用。照这样下去，我们总是不断地在选择下一步的任务，确定下一步要求的未知量，使得我们能从前面已经求得的未知量得到最大的帮助（这就是我们在§6.5中提到过的那个想法。）

下面有少量的习题，使读者有机会去品味一下上面所发表的这些议论。

6.11 求出在§6.1中详细叙述的三行幻方。

（你也许知道一个解，但你应当求出所有的解。在考察各未知量时，先后次序是很关紧要的。特别是，你应当先去定出那些能够唯一确定的未知量的数值，并从这些未知量开始入手。）

6.12 一个四位数乘以9就颠倒了数字次序（即得到另一个四位数，它的各位上数字的顺序正好与原数的相反），这个数是什么？（你准备先用条件的哪一部分？）

6.13 设a，b，c和d都是一位数，而二位数ab（即$10a+b$）中，$a\neq b$，且

$$ab\times ba=cdc$$

求此四数。

6.14 一个三角形有六个“部分”：三条边和三个角。是否可能找出这样两个不全等的三角形，第一个三角形中五个部分与第二个三角形中的五个部分相等？（我没有说这五个部分一定是对应的部分。）

6.15 艾尔、彼尔和克里斯计划搞一次大的野餐。每人出9元，都去买三明治，冰琪琳和汽水。对于其中每一样，三个孩子所花的总数都是9元，但每个孩子把他的钱分成三份的方式都是不一样的，而且没有一个孩子在不同的东西上花了相等的钱，在他们中间最大的单项支出是艾尔付冰琪琳的钱，彼尔买三明治花的钱是买冰琪琳的两倍。问克里斯在买汽水上花了多少钱？（所有的支出均以元为单位。）

6.16 为了迎接万圣节（11月1日），布朗、约尼斯和史密斯三对夫妇为邻居的孩子们买了点礼物。每一个人买的礼物的件数恰好同他（她）买的每一件礼物的价钱（美分数）

相同，每一位夫人又都比她们的丈夫多化75美分。安妮比彼尔·布朗多买了一件礼物，贝蒂又比乔·约尼斯少买一件，问玛丽的丈夫是谁？

6.17 在一个大热天里，四对夫妇在一起共喝掉了44瓶可口可乐。四位夫人中安妮喝了2瓶，贝蒂3瓶，凯洛4瓶，桃乐西5瓶。布朗先生与他的夫人喝得一样多，但其他三位丈夫都比自己的夫人喝得多：其中格林先生喝的是夫人的2倍，怀特先生是夫人的3倍，史密斯先生是夫人的4倍。试指出这四位夫人的丈夫都是谁。

6.18 *更多的问题*。试从本章所述的观点出发去考虑进一步的例子，注意把条件划分为一些分款，并且权衡一下从这一部分或从那一部分分款出发去着手解题的利弊。用这样的观点重温一下过去解过的一些题，并且再找出一些能够用上这个观点的新题目。

6.19 *一个中间目标*。我们已经开始着手去解我们的问题，但还停留在初始状态。我们已经全盘了解了我们的问题，这是一个求解的问题。我们也知道“什么是未知量”；并且清楚要找的是什么样的东西。我们也已经列出了数据，并从整体上了解了所给的条件，我们现在需要把条件划分成为适当的部分。

请注意，这可不是一件微不足道的小事：也许有许多种可能的划分，而我们所要的，当然是最有利的划分。譬如说，在用代数方法去解几何问题时，我们把条件中的每一分款都用一个方程来表示，把条件划分成为不同的分款就产生出不同的方程组，当然，我们要把那种最便于处理的方程组挑出来（参阅§2.5(3)和§2.5(4)）。

在所给的问题的叙述中，条件可以是一个未被划分的整体，也可能它已被划分成若干分款。无论在那一种情形下，我们都面临一个任务：在第一种情况下，我们要把条件划分成为合适的分款；而在第二种情况下，则要把条件进一步划分为更合适的分款。这种条件的再划分可以使我们更接近求出问题的解：这是一个中间目标，在一些场合下，它起着很重要的作用。

6.20 图示法。我们曾用符号方程[§6.1(3)中引进的]来表示一个由问题的条件所要求的关系。我们也可以用图来表示这些关系，而图示可以帮助我们对这些关系组有更清楚的了解。

我们用一个小圆圈表示一个未知量，用一个小方块去表示未知量之间的一个关系。此外，我们通过把代表某一关系的方块和代表某一未知量的圆连接起来的办法，来表示该方块所代表的关系里包含着该圆所代表的未知量。因此，图6.3的(a)表示了四个未知量之间的具有四个关系的关系组；在这个图里面，我们可以看到，譬如说，仅有一个未知量包含在所有4个关系中，和仅有一个关系式包含所有四个未知量；事实上，图(a)和§6.1(1)中的四个方程的方程组表示的是同一件事情，不过一个是用几何语言来表出的，另一个是用公式的语言表示罢了。图中两条线交于小圆或小方块外一点[如图(a)中就出现了这样一个交点]是无关紧要的；事实上，我们可以这样想象：只有那些小圆和小方块是在纸平面上，那些连线都是在空间里，虽然它们在纸平面上的投影偶尔也可以相交，而它们却没有公共点。

就如图(a)那样，图6.3中的(b)，(c)，(d)和(e)也都

是表示了以前考虑过的一些关系组，试指出这些考虑过的关系组所在的段落和习题。

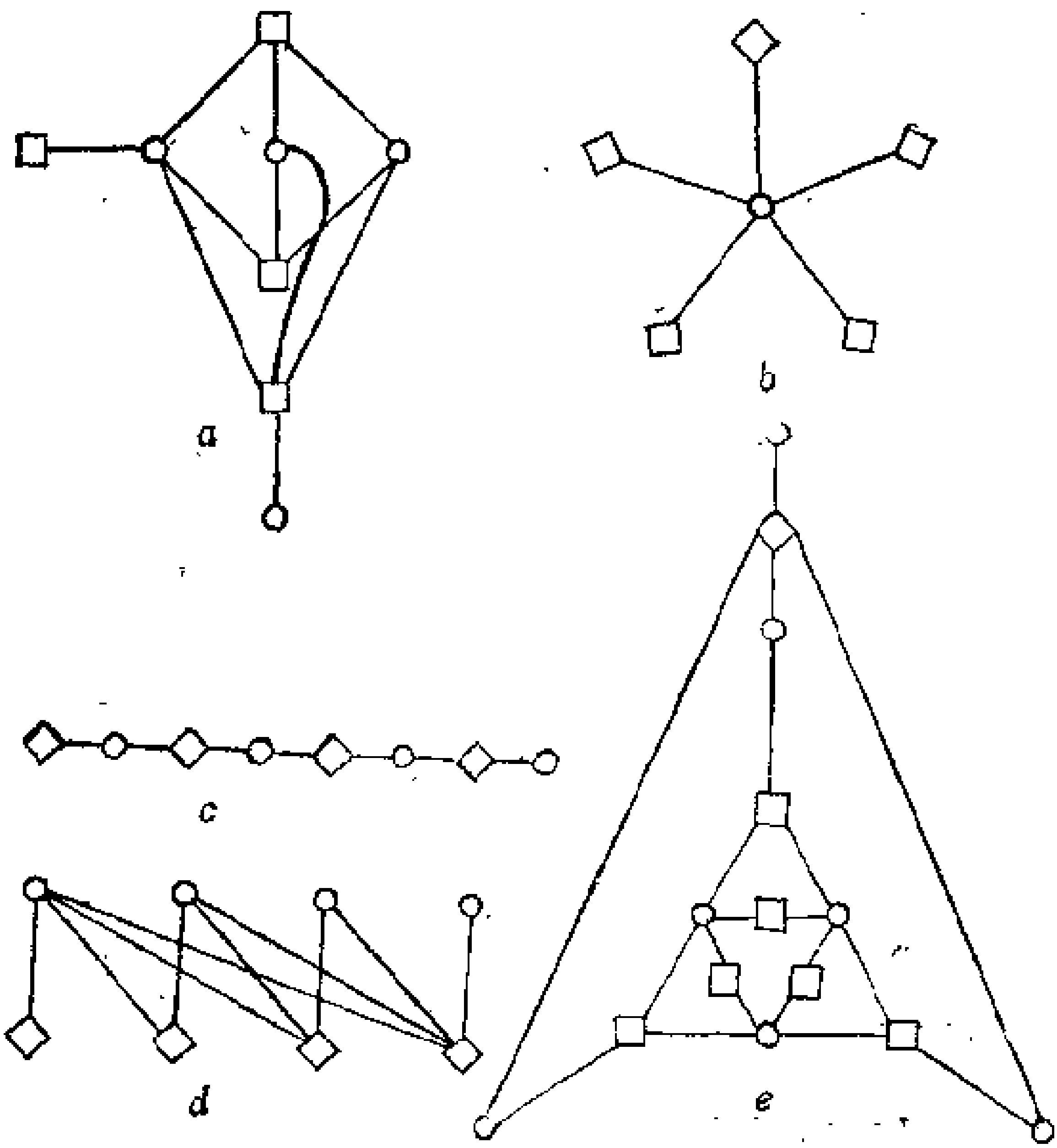


图6-4　圆圈和方块，未知量和关系

（图6.4例举了另外一类图示法，从某种意义上说，它跟上面那种图示法是互为“对偶”的*)。即无论是关系或是

*）即图6.3中的点（圆圈和方块）对应了图6.4中的线，而图6.3中的线却对应了图6.4中的点。

未知量都用直线来代表，关系用水平线来代表，未知量用铅直线来表示，当且仅当一个关系包含一个未知量时，它们的代表直线才有一个公共点。图6.3中的(c)和图6.4中的(c)表示的是同一个关系组。同样的，两个图中的(d)表示的也是同一个关系组。

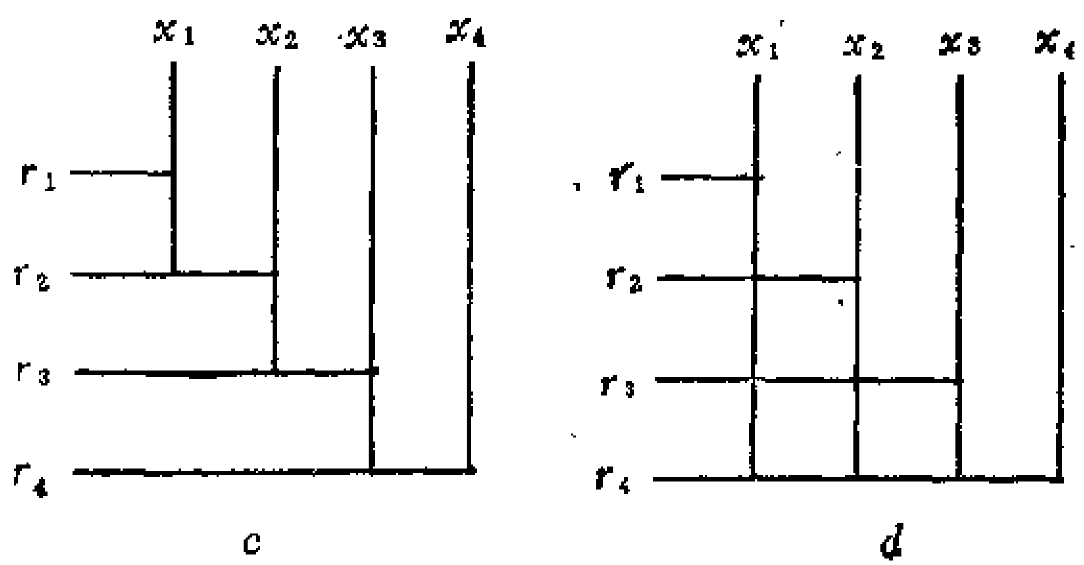


图6-5　未知量和关系，垂直线和水平线

) 图6.4可以提供一个代数表示法：我们可以用矩阵来表示一个关系组。令矩阵的每一行代表一个关系，矩阵的每一列代表一个未知量，矩阵的每个元素取值1或0。一个元素取值是1或是0，决定于这个元素所涉及的关系（即所在的行）是否包含有它所涉及的未知量（即所在的列）)。)

6.21 几个非数学问题的典型。我们首先应当去满足哪一个条件分款？这个问题在各种情形中都有代表性。当我们选

*) 即用"矩阵"去表示一张"图"。请参阅《英国中学数学教科书SMP》(有中译本) 和F·Harary著《图论》(Graph Theory)，第二版，1971。

定了一个认为是主要的分款，并且列出了满足这一“主”款的对象之后，我们再利用条件的“次”款，它常常可以淘汰掉大部已列出的对象，最后只留下一个对象，它既满足条件的主款，也满足条件的次款，从而满足全部条件。前面我们已经有机会看到了这样一个程序模型[§6.3(3)，习题6.15，习题6.16]，它可以从非数学问题中自然地提出来，也适用于各种类型的非数学问题。

翻译者的问题。把一篇法文翻译成为英文，我们就必须要对一个法文字找出英语中确切与之对应的字，比如说“*confiance*”，由法英字典中可查出许多对应字（*Confidence*, *trust*, *reliance*, *assurance*），它们仅仅满足问题的条件里的第一个较为粗略的分款，我们必须仔细地去考察上下文，从而进一步发现隐藏于其间的其它微妙的分款，然后利用这些另外的分款从已列出的字中淘汰掉那些不太适合的字而选出最达意的那个字。

两步将死。棋盘上摆出了黑白棋子的一个残局，轮到白字先走。问题的未知量是白子的第一步。条件要求不管黑子接下去的一步怎么走，白子第二步必须把黑方将死。

所要求的白子的第一步必须能提防黑子的任何可能的下一步（防止意外反击或为将军作准备），因此，我们可以说，有多少个需要提防的黑子可走的步子，就有多少个条件分款。

一个可行的策略是：先考虑黑子的威胁性最大的步子，并列出白子中所有能预防这一着的步子，然后再来考虑黑子中的“次要”的步子，淘汰掉已列出的白子步子中的那些不能预防黑子中“次要”步子的那部分，于是真正所要的解就在列出的步子中单独留下了。

工程设计。一个工程师想要设计一种新的小机械。为了使新机械能投入生产，它必须满足一大堆要求：有些是“技术”上的要求诸如好用、安全、耐久等等；其它是“商业”上的要求如成本低、销路好等等。工程师首先只去考虑技术上的要求（我们可以认为这是条件中的“主款”）这样工程师就有了一个明确的技术（物理）问题去解决。这个问题常常会有好几个解，工程师就把这些解列出来并审查它们。作了这些之后，再进而考虑商业上的要求（我们把它们作为条件中的“次款”），这些要求也许抛弃了好些很好用的机械而只留下最有利可图的一种。

6.22 试不用纸和笔，仅仅依靠观察，解出下列共有三个未知量和三个方程的方程组：

$$3x+y+2z=30$$

$$2x+3y+z=30$$

$$x+2y+3z=30$$

证明你得到的解是对的。

6.23 给定三角形的三条边长 a，b 和 c，设三角形的每一个顶点都是一个圆的圆心；且这三个圆都互相外切。试求出这三个圆的半径 x，y 和 z。

6.24 求出满足下列四元方程组的 x，y，u 和 v：

$$\begin{aligned} y+u+v&=-5\\ x\quad+u+v&=0\\ x+y\quad+v&=-8\\ x+y+u\quad&=4 \end{aligned}$$

你能看出一条捷径吗？

6.25 一个更加精细的分类。上面的例子6.22，6.23和6.24

说明了重要的一点：具有若干个未知量的一个问题，若其条件对于这些未知量来说是对称的，则它的求解过程（假若你能看出来的话）就要受到这种对称性的制约并可大大简化（也可参阅习题2.8和MPR，卷Ⅰ，pp.187—188，习题41。有时候，如习题6.23，我们不仅应当考虑未知量的置换，而且还应考虑未知量和数据的置换。）还有其他一些虽不常见但也是有趣的情形，在这些情形里，条件并不是对所有的未知量（和数据）的置换都保持不变，而仅对某一些置换保持不变。假如要对这种情形穷根追源的话，我们就需要对求解的问题进行比本章所提到的分类［见§6.1(6)］更为精细的分类，而且我们能够预见到这样一种分类对于我们的研究是很有趣的。

习 题 解 答

第 一 章

1.1 以定点为中心给定长度为半径的圆。

1.2 平行于给定直线的两条直线。

1.3 以给定点为端点的线段的垂直平分线。

1.4 平行于给定的平行直线且位于它们中间的直线，即平分它们之间距离的直线。

1.5 平分由给定直线交成的角的两条彼此垂直的直线。

1.6 两段关于线段AB彼此对称的圆弧，A与B是它们的公共的端点。

1.8 双轨迹，习题1.1。

1.9 双轨迹，习题1.1，1.2。

1.10 双轨迹，习题1.2，1.6。

1.11 双轨迹，习题1.1，1.6。

1.12 双轨迹，习题1.5。

1.13 双轨迹，习题1.2。

1.14 双轨迹，习题1.1，1.2。

1.15 双轨迹，习题1.6。

1.16 由对称性归结为§1.3例(2)或习题1.12。

1.17 双轨迹，习题1.6。

1.18 (a)如果X变化使得三角形$\triangle XCA$与$\triangle XCB$的面

积相等，则它的轨迹是通过C点的中线（证明它！）从而所要求的点乃是中线的交点。(b)如果X的变化使得$\triangle ABX$的面积保持为$\triangle ABC$的面积的$\frac{1}{3}$，X的轨迹是平行于AB的直线，到AB的距离等于从C点引出的高的$\frac{1}{3}$，见习题1.2。从而知所求的点是这些平行于边的直线的交点。两种解法都是用“双轨迹模型”。

1.19 联结内切圆圆心与边a的两个端点，这样得到的三角形的以内切圆圆心为顶点的角是

$$180^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$$

双轨迹，习题1.2，1.6。

1.20 辅助图形：以a为斜边和h_b为直角边的直角三角形。

1.21 辅助图形，见习题1.20。

1.22 辅助图形，见习题1.20。

1.23 辅助图形：以h_a为直角边而其所对角为β的直角三角形。

1.24 辅助图形，见习题1.23。其他解法：见习题1.34。

1.25 辅助图形：以d_a为斜边，高为h_a的直角三角形。

1.26 辅助图形：由三条边作三角形。

1.27 设$a>c$。辅助图形：由三条边，$a-c$，b，d作三角形，见HSI，问题5的变种，pp.211—213。

1.28 习题1.27对应于$\varepsilon=0$情形的推广。辅助图形：由a，c，ε作三角形。见MPR，卷Ⅰ，pp.142—145。

1.29 辅助图形：由a，$b+c$，$\frac{\alpha}{2}$作三角形。

1.30 辅助图形：由a，$b+c$，$90°+\frac{\beta-\gamma}{2}$作三角形。

1.31 辅助图形：由$a+b+c$，h_a，$\frac{\alpha}{2}+90°$作三角形。见HSI，辅助元素3，pp.48—50与对称性，pp.199—200。

1.32 适当改变§1.6中(1)的方法；让两个半径中的一个扩大而另一个按同样比例缩小。辅助图形：从圆外一点作圆的切线，然后再作两个长方形。

1.33 参考§1.6中(1)。辅助图形：以给定三圆的圆心为顶点的三角形的外接圆。

1.34 由α，β先作相似三角形，利用给定的长度d_γ进一步作出所求的三角形。与习题1.24的作法实质上是一样的。

1.35 相似的图形：相似中心是给定三角形的直角顶点，直角的角平分线与斜边交于所求正方形的一个顶点。

1.36 习题1.35的推广。相似中心是A（或B）。参见*HSI*，§18，*pp*.23—25。

1.37 相似图形：相似中心是圆心。所求的正方形关于扇形的对称轴对称。

1.38 相似图形：切于给定直线的任一圆，圆心应当落在联结两给定点的线段的垂直平分线上。这个平分线与给定直线的交点便是相似中心。本题有两个解。

1.39 作给定的两条切线的交角的角平分线，利用对称性可以另外再得到圆应当通过的一点，于是问题归结为习题1.38。

1.40 引内切圆到各切点的半径，它们互相间的夹角是 $180°-\alpha$，$180°-\beta$，…；因而立即得到一个相似的图形。应用到任意边数的外切多边形的情形。

1.41 设A表示面积，a，b，c表示所求三角形的边长（习题1.7），于是

$$2A = ah_a = bh_b = ch_c$$

以h_a，h_b，h_c为边作一三角形，设A'是它的面积，而a'，b'，c'是对应的高，则

$$2A' = h_a a' = h_b b' = h_c c'$$

所以

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

因此，以a'，b'，c'为边的三角形相似于所求的三角形。

1.42 习题1.41的上述解法是不完善的，如果$h_a=156$，$h_b=65$，$h_c=60$，所求三角形虽然是存在的，但是以h_a，h_b，h_c为边的辅助三角形却不存在。

一个可能的补救办法是将问题推广：设k，l，m是任意的正整数，而a'，b'，c'，是以kh_a，lh_b，mh_c为边的三角形的高（这里符号的含义与习题1.41不同）则

$$\frac{a}{ka'} = \frac{b}{lb'} = \frac{c}{mc'}$$

例如，以156，65和$120=2\times 60$为边的三角形是存在的。

1.43 从外接圆的圆心向边a的一端引一直线并作此边的垂线，这样便可得到一个以R为斜边，以α为一角，而其所对边则为$\frac{a}{2}$的直角三角形。这样，在a，α和R之间便存在一个关系：只要知道了其中的两个，便可以作出第三个来

（这个关系可以写成三角方程$a=2R\text{Sin}\alpha$）。如果问题给出的已知数据不满足这个关系式，则问题无解；当它满足时，问题的解也是不确定的。

1.44 (a)给定α，β，γ作三角形：这个问题或者是无解的，或者是不确定的。

(b)习题1.43和(a)乃是下述一般情形的特例：解的存在性蕴含了已知数据间的某个关系式，所以已知数据是否满足这个关系式便决定了解是不确定的或是不存在的。

(c)由习题 1.43的解法，问题归结为：给定 a，β，α，求作三角形。

(d)由习题1.43的解法，问题归结为习题1.19。

1.45 我们假定声速不受我们所不能控制的环境变化的影响（例如风或是温度的变化）。根据监听站A和B所测得的时间差，我们可以得到两个距离的差$AX-BX$，从而得出点X的一条轨迹——双曲线。把C与A（或B）作比较，可得出另一条双曲线。两条双曲线的交点便是X。与习题1.15相似的地方是由记录数据得到了两条轨迹。不同的地方是在那里两条轨迹是圆弧，而这里是双曲线，我们用直尺和圆规是作不出双曲线的，但可以用某些其他的仪器把它作出来。至于三个监听站测得的结果我们也可以做出仪器，对它们进行方便的计算。

1.46 如果只是生搬硬套§1.2模型的叙述，那么这些轨迹就不能适用了。实际上，这些轨迹是适用于这个模型的，而且我们在前面的例子里曾不止一次用过了。但是需要把§1.2的说法推广一下，即应当允许把有限条直线，或有限个圆，或有限个直线段，或有限个圆弧的并也看作是一条轨迹。

1.48 如果把条件分解以后所得的各个部分条件并列起来，与原来的条件等价，那么不管条件怎样分解，彼此必都是等价的。正是由于这一点，我们可以说三角形的边的垂直平分线（有三条）通过同一点。而对于四面体则有：棱的垂直平分面（有六个）通过同一点。

1.50 (1)除去某些例外的情形（见习题1.43和1.44），在习题1.7列出的那些三角形成分中，给出三个不同的成分，求作一个三角形。下面给出一些组合，它们的作图是不难的：

$$a,\quad h_b,\quad R$$
$$a,\quad h_b,\quad m_b$$
$$a,\quad h_b,\quad m_a$$
$$h_a,\quad d_a,\quad b$$
$$h_a,\quad m_a,\quad m_b$$
$$h_a,\quad m_b,\quad m_c$$
$$h_a,\quad h_b,\quad m_a$$
$$a,\quad b,\quad R$$

还有α，β加上在习题1.24和1.34中未曾提到过的任何其他线段。

$$\alpha,\ r,\ R$$

是不太容易的。

(2) 类似于§1.6例(3)，关于三面角也有若干用不着依靠画法几何就可以解决的重要的问题。下面就是一个：“给定三面角的一个面角 a 以及与它毗连的两个二面角 β和 γ，求作其余的两个面角 b 和 c。”解法是不难的，不过我们

这里不能更多地去讲它了。

(3) 习题1.47是§1.3例(1)的空间类比，试讨论§1.3例(2)，习题1.18，§1.3例(3)，和习题1.14的空间类比。

1.7，1.47，1.49，1.51是评注，不存在解的问题。

第　二　章

2.1 如果鲍勃有x个5美分的硬币和y个10美分的硬币，则由条件可得出方程组

$$5x+10y=350$$

$$x+y=50$$

约去公因数后，我们所得到的方程组与§2.2例(3)相同。

2.2 假定有m条油管是注入油箱的，而有n条油管是从油箱流出去的。第一条管子用a_1分钟可注满油箱，第二条管子要a_2分钟，…第m条管子要a_m分钟。对另一类管子，第一条用b_1分钟可使油箱内的油全部流完，第二条管子要用b_2分钟，…第n条管子要用b_n分钟。所有的管子都打开，需要用多少时间才能使空油箱注满？

所求的时间t满足方程式

$$\frac{t}{a_1}+\frac{t}{a_2}+\cdots+\frac{t}{a_m}-\frac{t}{b_1}-\frac{t}{b_2}-\cdots-\frac{t}{b_n}=1$$

如果解出t是负的，怎样解释？也可能方程是没有解的，这种情况又怎样解释？

2.3 (a)沃卡奇先生把收入的三分之一用于伙食，四分之一付房租，六分之一做衣服，此外没有别的支出，他想知道一年的收入能维持多久的生活？

(b)假设联结两点的三条导线上的电阻分别是3，4和6

欧姆，如果通过三条导线电流的总和为1安培，问两点间的电压应为多少伏特？等等。

2.4 (a)如果把w换成$-w$，则x不变：情况变成出航时为顺风，返航时为逆风，而续航时间不变。

(b)用量纲去检查；见HSI，pp.202—205。

2.5 方程组

$$x+\ \ y=v$$

$$ax+by=cv$$

和§2.6例(2)中所得到的方程组完全一样。

2.6 按照§2.5例(1)的方法建立坐标系，令$AB=a$，则所求圆心坐标(x, y)满足方程组

$$\begin{cases} a-\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+y^2}-\dfrac{a}{4} \\ x=\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

由此可得

$$y=\frac{a\sqrt{6}}{5}$$

2.7 海伦公式看起来比较吓人，其实，只要注意运用"平方差的公式"，问题也是容易处理的：

$$\begin{aligned} 16D^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= [(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2] \\ &= (2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2) \\ &= 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2 \\ &= 4(p^2+q^2)(p^2+r^2)-(2p^2)^2 \end{aligned}$$

2.8 (a)有关知识。解法(3)需要较多的平面几何知识(海伦公式不象三角形面积等于底乘高之半这个公式那样常用)。而解法(4)需要较多的立体几何知识(我们必须看出

并证明k垂直于a）。

(b)对称性。A，B和C三个数据地位相同，所以问题关于它们是对称的。解法(3)利用了对称性，而解法(4)则更多地用到A。

(c)解题方案。方法（3）更为按部就班，我们从一开始就觉得较有把握。事实上，很快我们便得到了一个七阶方程组。乍看起来，这个方程组是太难了（这并不是方法的缺陷，在§6.4(2)里，有解这个方程组的办法）。方法(4)预先不易见到它的好处，但它却“碰对了”（谢天谢地），而且用较简单的计算就把最后结果得出来了。

2.9
$$V^2 = \frac{p^2q^2r^2}{36} = \frac{2ABC}{9}$$

2.10 由§2.5(3)的三个方程
$$a^2 = q^2 + r^2, b^2 = r^2 + p^2, c^2 = p^2 + q^2$$
可得
$$p^2 + q^2 + r^2 = s^2$$
$$p^2 = s^2 - a^2,\ q^2 = s^2 - b^2,\ r^2 = s^2 - c^2$$
于是由习题2.9，得
$$V^2 = (s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)/36$$

2.11 $d^2 = p^2 + q^2 + r^2$，这个问题在HSI，第一部分有统一的处理，见pp. 7－8，10-12，13-14，16-19。

2.12 取符号与习题2.10和§2.5(3)同，重复一下在习题2.10中已作过的计算，可得
$$d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

2.13 四面体由它的六条棱的长度唯一确定，空间的这

个结果与我们在§1.1里讨论过的那个平面问题类似。适当选取习题2.11和2.12中所考虑的长方体面上的对角线，设长方体体积为pqr，切去它的四个相等的、具三直角顶点且体积为$\frac{1}{6}pqr$（见习题2.9）的四面体，便可得到本题所给的四面体。于是所求四面体体积为

$$V=pqr-\frac{4}{6}pqr=\frac{1}{3}pqr$$

由习题2.10，$p^2=s^2-a^2$，$q^2=s^2-b^2$，$r^2=s^2-c^2$，故

$$V^2=(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)/9$$

2.14 习题2.10：若$V=0$，则有某个因子，比如$s^2-a^2=p^2$为0，于是有两个面退化为线段，而另外两个面变成全同的直角三角形。

习题2.13：若$V=0$，则四面体便退化为双层重叠的矩形，它的四个面变成了全同的直角三角形。实际上，若$s^2-a^2=0$，即有$a^2=b^2+c^2$。

2.15 §2.7最后一个方程指出，所求的矩形的边x是一个直角三角形的斜边，它的两直角边是$3a$和a。在十字形里可以用四种方法（它们并没有什么本质不同）去求得线段x：x的中点应该是十字形的中心，后者将x分成两段，每段长为$\frac{x}{2}$，都可以作所求矩形的另一边，具体作法见图S2.15。

2.16 (a) $x^2=12\times9-8\times1=100$，$x=10$

(b)因为

$$10=12-2=9+1$$

所以应当向上移动一个单位，向左移动两个单位。

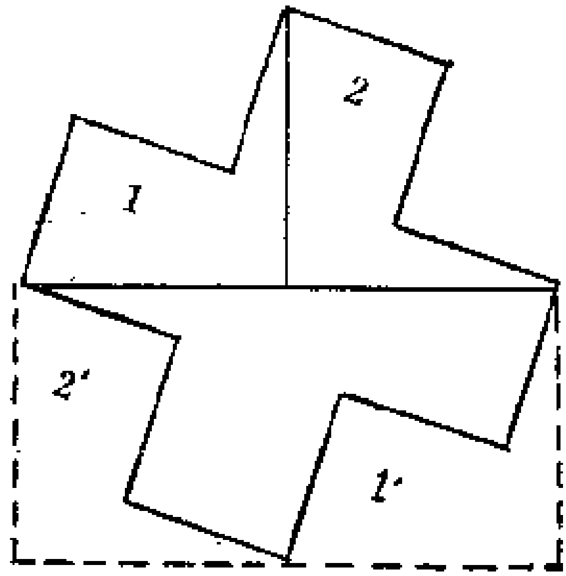
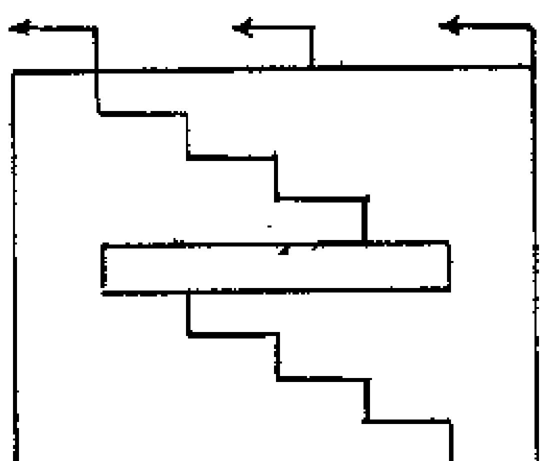


图 S2.15

(*c*)保持中心对称似更有理。

见图S2.16。



图S2.16

2.17 设 x 和 y 分别表示骡子和驴子所驮的重量，则

$$y+1=2(x-1)$$

$$x+1=3(y-1)$$

解出$x=\frac{13}{5}$，$y=\frac{11}{5}$。

2.18 设史密斯先生有 h 磅行李，他的太太有 w 磅行李，而每位旅客可免费运送 x 磅行李，则

$$h+w=94$$

$$\frac{h-x}{1.5}=\frac{w-x}{2}=\frac{94-x}{13.5}$$

由此可解得$x=40$。

2.19 由

$$x+(x+100)+(x+300)=1600$$

可得$x=400$。

2.20 每个儿子都分了3000英磅。

2.21 如果每个孩子所得为 x，整个遗产为 y，则

第一个孩子得 $\quad x=100+\dfrac{y-100}{10}$

第二个孩子得 $\quad x=200+\dfrac{y-x-200}{10}$

第三个孩子得 $\quad x=300+\dfrac{y-2x-300}{10}$

等等。任意相邻两个等式相减，其右端的差是

$$100-\frac{x+100}{10}$$

左端差等于 0，即得$x=900$，由第一个方程得$y=8100$，所以有 9 个孩子。

2.22 假定三赌徒开始赌时的钱分别为 x、y 和 z，令

$$s=x+y+z$$

$(s=72)$。我们来考虑四种不同情况下赌徒们的钱数，每赌一场，情况便发生变化，可是总钱数s是不变的。

第一人	第二人	第三人
x	y	z
$2x-s$	$2y$	$2z$
$4x-2s$	$4y-s$	$4z$
$8x-4s=24$	$8y-2s=24$	$8z-s=24$

所以，$x=39$，$y=21$，$z=12$。

2.23 与§2.4的(1)和(2)类似，这是习题2.2的特殊情形：

$$m=3,\ n=0,\ a_1=3,\ a_2=\frac{8}{3},\ a_3=\frac{12}{5}$$

因此$t=\frac{8}{9}$周。

2.24 牛顿的意思是朝习题2.2的方向作一个推广，不过走得并不远，没有“放水管”，所以没有“b”，$n=0$。

2.25 每蒲式耳小麦、大麦、燕麦分别为5、3和2先令。见习题2.26。

2.26 设x，y，z是三种商品的价格，而p_ν是a_ν个第一种商品、b_ν个第二种商品和c_ν个第三种商品价钱的和，其中$\nu=1$，2，3。这样便可得一个三元一次方程组

$$a_\nu x+b_\nu y+c_\nu z=p_\nu$$
$$\nu=1,\ 2,\ 3$$

这是习题2.25的推广，我们把2.25处的数据表

40	24	20	312
26	30	50	320
24	120	100	680

变成了字母表

$$
\begin{array}{cccc}
a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & p_3
\end{array}
$$

从 3 种商品的情形推广到n种 商品的情形是不困难的。

2.27 以 a 表示开始放牧时一英亩牧地上牧草的量，β 是一条牛一周吃的草量，γ 表示一英亩牧地一周后生产的草量，a_1，a_2和 a 是牛的数目，m_1、m_2和 m 是英亩数，t_1 t_2和 t 分别是三种情况下的周数。这里 a，a，β，γ 是未知量，其余 8 个量是已知的。条件是

$$m_1(a+t_1\gamma)=a_1t_1\beta$$

$$m_2(a+t_2\gamma)=a_2t_2\beta$$

$$m(a+t\gamma)=at\beta$$

由此可得未知量$\frac{a}{\beta}$，$\frac{\gamma}{\beta}$，a 的三元一次方程组。解之得

$$a=\frac{m[m_1a_2t_2(t-t_1)-m_2a_1t_1(t-t_2)]}{m_1m_2t(t_2-t_1)}$$

对于给定的数据有$a=36$。

2.28 设等差数列为

$$a,\ a+d,\ \cdots,\ a+4d$$

求第一项 a 和公差 d。

已知它们的和是100

$$a+(a+d)+\cdots+(a+4d)=100$$

以及后三项的和等于前两项的和的 7 倍

$$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=7[a+(a+d)]$$

由方程组

$$5a+10d=100$$
$$11a-2d=0$$

可解出 $a=\frac{5}{3}$， $d=\frac{55}{6}$。因此等差数列乃是

$$\frac{10}{6},\ \frac{65}{6},\ \frac{120}{6},\ \frac{175}{6},\ \frac{230}{6}$$

2.29 $\frac{m}{r}+m+mr=19$

$$\frac{m^2}{r^2}+m^2+m^2r^2=133$$

令 $r+\frac{1}{r}=x$，方程组变成

$$m(x+1)=19$$
$$m^2(x^2-1)=133$$

用第一个方程去除第二个方程，得到mx和m的线性方程组，解得$m=6$， $x=\frac{13}{6}$。$r=\frac{3}{2}$或$\frac{2}{3}$，所以有两个（实际上是同一个！）等比数列：4，6，9 和 9，6，4。

2.30 $a(q^3+\frac{1}{q^3})=13$

$$a(q+\frac{1}{q})=4$$

用第二个方程除第一个方程，得到q^2的一个二次方程，由此可得等比数列为

$$\frac{1}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{16}{5},\ \frac{64}{5}$$

或

$$\frac{64}{5},\ \frac{16}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}$$

2.31 设 x 是商人数，则总的利润可以用两种不同的方法(按照每人分得的和按照分配的方法)去表示

$$(8240+40x\cdot x)\frac{x}{100}=10x\cdot x+224$$

方程

$$x^3-25x^2+206x-560=0$$

没有负根（以$x=-p$代入）。如果它有有理根的话，必为一正整数，且为560的因数。因此我们可以逐次用 $x=1$，2，4，5，7，8，10，14，16，…去试，结果可得其根为7，8和10（当然，欧拉首先是作出方程，然后编出这个故事，你可以试着模仿一下）。

2.32 与正方形不共心的四个圆，其圆心乃是一个正方形的四个顶点，我们可以用两种不同的方式去表示它的对角线：

$$(4r)^2=2(a-2r)^2$$

故

$$r=(\sqrt{2}-1)a/2。$$

2.33 设$x+\frac{d}{2}$是等腰三角形底边上的高，则有

$$(x+\frac{d}{2})^2+(\frac{b}{2})^2=s^2$$

$$x^2+(\frac{b}{2})^2=(\frac{d}{2})^2$$

消去 x，即得

$$4s^4-4d^2s^2+b^2d^2=0$$

2.34 (*a*)方程关于d^2和b^2都是一次的，但是关于s^2是二次的，因此，有理由认为解 s 的问题要比其他两个问题麻烦些。

(b) d 有正值的充分必要条件是$4s^2>b^2$。

b 有正值的充分必要条件是$d^2>s^2$。

s 有两个不同的正值的充分必要条件是$d^2>b^2$。

读者能从这里学到一些东西——牛顿对习题2.33的解法有下述注解："分析学家叫我们别管已知量和未知量之间的差别。因为对已知量和未知量的各种不同情形，它们的运算关系是一样的，因此，在对它们进行表示和比较过程中不作区别，是方便的，……或者说得更确切一点，我们可以把问题中的已知量和未知量想象为是按照最容易列出方程的方式给出来的。"后来他又说："因为，我相信，当几何学家嘱告说'你想象要找的东西已经作出来了'，他的意思是很清楚的。"

（"设想问题已经解出来了"，参看§1.4。）

2.35 列方程时，我们跟测量员所考虑的刚好相反，设x和α，β，γ，δ是已知的，而l倒是未知的。由$\triangle UVG$，可以把GV由x,$\alpha+\beta$和γ表示出来(正弦定律)。由$\triangle VUH$，可以把HV由x,β和$\gamma+\delta$表示出来(正弦定律)。由$\triangle GHV$，可以把δ由GV、HV和l表示出来（余弦定律）。利用GV和HV的表达式可得

$$l^2=x^2\left[\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma+\delta)}-\frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cdot\cos\delta}{\sin(\alpha+\beta+\delta)\sin(\beta+\gamma+\delta)}\right]$$

于是x^2可由l，α，β，γ和δ表出。

2.36 设 A $2s$ a b c

分别是

面积 周长 斜边 直角边

A和s是已知量，a，b和c是未知量，解下列方程组

$$a+b+c=2s,\ bc=2A,\ a^2=b^2+c^2$$

把$(b+c)^2$用两种不同的方式表示出来：

$$(2s-a)^2=a^2+4A$$

$$a=s-\frac{A}{s}$$

2.37 设三角形的三边之长分别是$2a$，u，v；$u+v=2d$；长度为$2a$的边上的高为h。

给定a，h，d，求u，v。

用x和y分别表示u和v在$2a$上的正投影，并令

$$x-y=2z$$

则

$$x+y=2a$$

$$u^2=h^2+x^2 \qquad v^2=h^2+y^2$$

于是

$$u^2-v^2=x^2-y^2$$

即

$$2d(u-v)=2a\cdot 2z$$

$$u=d+\frac{a}{d}z \qquad v=d-\frac{a}{d}z$$

$$x=a+z \qquad y=a-z$$

$$\left(d+\frac{a}{d}z\right)^2=h^2+(a+z)^2$$

$$z^2=d^2\left(1-\frac{h^2}{d^2-a^2}\right)$$

2.38 若a和b是两邻边的长度，c和d是两对角线的长度，则

$$2(a^2+b^2)=c^2+b^2$$

其实，对角线把平行四边形分成四个三角形，对相邻的两个三角形用余弦定律即得。

2.39 $$(2b-a)x^2+(4a^2-b^2)(2x-a)=0$$

若$a=10$，$b=12$，则$x=16(-8+3\sqrt{11})/7$，十分近似于$\frac{32}{7}$。试解释一下$a=2b$的情形。

2.40 $$a^2(3+\sqrt{3})/2$$

2.41 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{2}{9}$。事实上，大三角形的边被小三角形的顶点分成2与1之比。

2.42 （斯坦福大学1957）首先考虑最简单的情形，即已知三角形为等边三角形。由对称性，我们猜想在这种情况下那四个小三角形也应该是等边的。如果真是这样，那么这些小三角形的边就应该平行于已知三角形的边。这样，我们便发现了图形的基本特征，利用这一特征，不仅可以解决特殊情形下的问题，而且也可以解决一般情形下的问题（我们利用“仿射性”从等边三角形过渡到任意三角形）。作平行于已知三角形一边的四条平行线，它们把另外那两边都五等分。对已知三角形的三边都作这样的平行线，便把已知三角形分成了25个与已知三角形相似的全同三角形。在这25个三角形中，我们很容易就可以找出题目里的那四个三角形，每个小三角形的面积是已知三角形面积的1/25（解法是唯一确定的，证明略）。

2.43 （斯坦福大学1960）考虑一般情形。设P为矩形内一点，它到四个顶点和四条边的距离依次（按时针方向）为a，b，c，d和x，y，x'，y'。则有

$a^2=y'^2+x^2$, $b^2=x^2+y^2$, $c^2=y^2+x'^2$, $d^2=x'^2+y'^2$

于是

$$a^2-b^2+c^2-d^2=0$$

在我们考虑的情形，$a=5$，$b=10$，$c=14$，可得

$$d^2=25-100+196=121,\ d=11$$

请注意，已知量 a，b 和 c 虽然可以完全确定 d，却不足以确定矩形的边 $x+x'$ 和 $y+y'$。

2.44 设 s 是正方形的边长，则由习题2.43，$x+x'=y+y'=s$，我们有三个未知量 x，y，s 和三个方程

$$x^2+(s-y)^2=a^2,\ x^2+y^2=b^2,\ y^2+(s-x)^2=c^2$$

于是

$$2sy=s^2+b^2-a^2,\ 2sx=s^2+b^2-c^2$$

平方后相加，得到一个 s^2 的二次方程

$$s^4-(a^2+c^2)s^2+[(b^2-a^2)^2+(b^2-c^2)^2]/2=0$$

考虑下列特殊情形的几何意义：

(1) $s^2=2a^2$ 或 $s=0$。

(2) $s=a$。

(3) 除非 $c^2=2b^2$（此时 $s^2=b^2$），否则 s 是虚数。

(4) 除非 $c^2=a^2$（此时 $s^2=a^2$），否则 s 是虚数。

2.45 （斯坦福大学1959）$\dfrac{100\pi}{4}$ 和 $\dfrac{100\pi}{2\sqrt{3}}$，其近似值分别为78.54%和90.69%。当我们从一个大的方桌向无限平面过渡时，实际上涉及到极限概念，不过我们不去详细讨论它而满足于直观。

2.46 按照习题2.32的办法，把某一个立方体的对角线用两种不同的方法表示出来：

$$(4r)^2 = 3(a-2r)^2$$

$$r = (2\sqrt{3} - 3)a/2$$

2.47 设P点（可以是空间中任意一点）到矩形四个顶点的距离按顺序分别为a，b，c和d。给定其中三个，求第四个。

因为习题2.43里的关系式

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

对现在这个更一般的情形也是成立的，所以立即可以得出解。因为长方体任何两条对角线也是某个矩形的对角线，所以上述结果也可以应用于点P和长方形上四个适当选择的顶点。

2.48 一个立体几何问题的解常常依赖于一个"辅助的平面图形"，用这把"辅助平面图形"钥匙，可以打开洞悉本质的大门。

通过棱锥的高作一个平面，它平行于底面的两条边（而垂直于其余两边），这个平面和棱锥的交线为一等腰三角形，可以用它来做开门的钥匙（"辅助图形"），此等腰三角形的高是h，底为棱锥底面的边长a，因为它的腰就是侧面的高，故等于$2a$，于是

$$(2a)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

所求面积为

$$5a^2 = 4h^2/3。$$

2.49 例如，正六棱锥的表面积等于底面积的四倍。给定底的边长a，求正棱锥的高h（$h = \sqrt{6}a$）。

参见习题2.52。

2.50 平行四边形中，两条对角线的平方和，等于四条边的平方和（习题2.38的结论）。

在平行六面体中，令

$$D \qquad E \qquad F$$

分别表示

四条对角线　12条棱　12条面对角线

的平方和，则

$$D=E=\frac{F}{2}$$

（重复应用习题2.38的结果即得。）

2.51 所求面积的平方是

$$16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

可以把它看成是海伦公式的类比，由于它们太相象了，所以题目本身反而意思不大了。

2.52 （斯坦福大学1960）设a是三角形的边长，T是四面体体积，O是八面体体积。

解法一：八面体可以被某一平面分成两个全等的正四棱锥；底面积等于a^2，棱锥的高是$\frac{a}{\sqrt{2}}$（这里，"辅助平面图形"通过正方形底的对角线），于是

$$O=2\frac{a^2}{3}\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

作通过四面体的高和与它相连的棱的平面，它与四面体的交是两个直角三角形（"辅助平面图形"），由此可得

$$h^2=a^2-\left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{2a^2}{3}$$

于是

$$T=\frac{1}{3}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

故

$$O=4T$$

解法二：考虑棱长为$2a$的正四面体，它的体积是2^3T。通过它的任三条从同一顶点发出的棱的中点，可作一平面，这样的四个平面把正四面体剖分成四个相等的体积为T的正四面体和一个体积为O的正八面体，于是

$$4T+O=8T$$

由此又得$O=4T$。

2.53 体积比是

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

表面积比是

$$\frac{b+c}{a}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}$$

2.54 （斯坦福大学1951） 圆台体积小于圆柱体积，其差为一正数：

$$\pi h\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi h(a-b)^2}{12}$$

仅当$a=b$时为0，此时两立体完全重合。

MPR卷1第8章含有代数不等式在几何里的若干应用。

2.55 设 r是$\triangle ABC$外接圆的半径，则

$$r^2=h(2R-h),\ r=\frac{2}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

于是

$$R = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}$$

其中$\frac{h}{2}$在实践中常可忽略不计。

2.57 35哩，参见习题2.58。

2.58 我们用文字代替上题里的数字(在括弧中 给 出)：

a $\left(\frac{7}{2}\right)$ 是A的速度，

b $\left(\frac{8}{3}\right)$ 是B的速度，

c （1） 出发相隔的时间，

d （59） 两出发点间的距离。

设x和y分别表示A、B走过的路程，则方程为

$$x + y = d$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$$

解得

$$x = \frac{a(bc + d)}{a + b}。$$

牛顿将问题的一般提法陈述如下：“给定两相向运动物体A和B的速度，以及它们之间的距离和开始运动的时间间隔，求它们相遇的地点。”

2.59 （斯坦福大学1959）引进下列符号：

u ——艾尔的速度，

v ——比尔的速度，

t_1 ——第一次遇见的时间，

t_2 ——第二次遇见的时间，

d ——街道的长度。

则有

$$ut_1 = a, \qquad ut_2 = d + b$$

$$vt_1 = d - a, \qquad vt_2 = 2d - b$$

（1）用两种不同的方式表示$\frac{u}{v}$，得

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}$$

于是，弃去零解，得$d = 3a - b$。

（2）显然艾尔快，因为这时$\frac{u}{v} = \frac{3}{2}$。

2.60 （斯坦福大学1955）见习题2.61。亦可参见HSI，pp.236，239—240，247：习题12。

2.61 在出发点和$n+1$个朋友第一次同时再相遇的点之间，鲍勃有$2n-1$个不同的运动状态：

（1）鲍勃带A乘车

（2）鲍勃单独乘车

（3）鲍勃带B乘车

（4）鲍勃单独乘车

· · · · · · · · ·

$(2n-1)$鲍勃带L乘车

图$S2.61$是$n=3$的情形，有五个运动状态。表示着A，B，C的旅行路线的直线都标上了字母，其中斜率陡的线表示乘车旅行。由安排的对称性（这一点从图$S2.61$上看得特别清楚），所有n个属奇数次的运动状态持续的时间都一样，设为T。而所有$n-1$个属偶数次的运动状态持续的时间也是一样的，设为T'。用两种不同的方法（一是从鲍勃，一是从他的一个朋友）表示$2n-1$个运动状态（在$nT+(n-1)T'$个单位时间

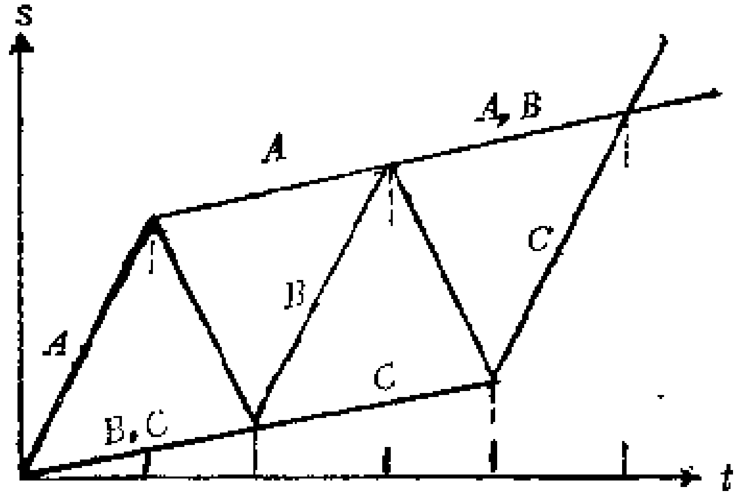


图 S2.6

内）走过的整个行程，得

$$nTc-(n-1)T'c=Tc+(n-1)(T+T')p$$

于是

$$\frac{T}{T'}=\frac{c+p}{c-p}$$

(1) 他们一行的速度是

$$\frac{nTc-(n-1)T'c}{nT+(n-1)T'}=c\frac{c+(2n-1)p}{(2n-1)c+p}$$

(2) 鲍勃单独乘车的时间是整个时间的

$$\frac{(n-1)T'}{nT+(n-1)T'}=\frac{(n-1)(c-p)}{(2n-1)c+p}$$

(3) 与(1)、(2)的结果在极端情形与我们的直觉相符(只有(2)在$n=\infty$时例外)：

	$p=0$	$p=c$	$n=1$	$n=\infty$
行程速度	$\frac{c}{2n-1}$	c	c	p
鲍勃单独乘车时间与整个时间的比	$\frac{n-1}{2n-1}$	0	0	$\frac{c-p}{2c}$

2.62 设t_1是石块下降的时间，t_2是声音传上来的时间，由

$$T = t_1 + t_2$$

$$d = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$d = c t_2$$

得

$$d = \{ -c(2g)^{-\frac{1}{2}} + [c^2(2g)^{-1} + cT]^{\frac{1}{2}} \}^2$$

参见MPR卷 I p.165和p.264习题29。

2.63 令$\beta' = \angle ACO$，由

$$\frac{\sin\omega}{\sin\beta} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{\sin\omega'}{\sin\beta'} = \frac{AC}{AO}$$

得

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} \cdot \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{t}{t'}$$

另一方面，因为$\beta' = \beta - (\omega' - \omega)$，用两种不同的 方 法表示$\frac{\sin\beta'}{\sin\beta}$，可得

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(\omega' - \omega) - \frac{t\sin\omega'}{t'\sin\omega\sin(\omega' - \omega)}$$

2.64 把三个方程加起来，得

$$a + b + c = 0$$

如果给定的数据a，b和c不满足此关系式，则方程组无解，即不存在数x，y，z同时满足三方程。若此关系式满足，问题是不确定的，即解有无穷多个，因为由前两个方程可得

$$x = z + \frac{3a + b}{7}$$

$$y = z + \frac{2a+3b}{7}$$

其中 z 可以任意取值。

参考习题1.43和1.44。

2.65 (斯坦福大学1955)比较恒等式两边 x 同次幂的系数，可得三个未知数 p，q，r 必须满足的五个方程：

$1 = p^2$，$4 = 2pq$，$-2 = q^2 + 2pr$，$-12 = 2qr$，$q = r^2$

由头一个方程得$p = \pm 1$,依次用于后两个方程便可确定两组解：

$p = 1$，$q = 2$，$r = -3$，和$p = -1$,$q = -2$,$r = 3$

它们恰好也满足其余两个方程。

一般来说，平方根不可能恰好开出来，因为通常过定方程组是没有解的。

2.66 (斯坦福大学1954) 将所设恒等式右端展开，使对应的系数相等，得

(1) $aA = bB = cC = 1$

(2) $bC + cB = cA + aC = aB + bA = 0$

由(2)有

$$bC = -cB,\ cA = -aC。aB = -bA$$

将此三方程相乘，得

$$abcABC = -abcABC$$

所以

$$abcABC = 0$$

可是由（1）又有

$$abcABC = 1$$

矛盾！这表明所设恒等式是不可能的。

我们在这里看到了一个不相容的6阶线性方程组。

2.67 $x=5t$，$y=60-18t$，$z=40+13t$是正的，当且仅当$0<t<\frac{60}{18}$，因此t只能取1，2和3，于是得出（x，y，z）的三组解：

（5，42，53），（10，24，66），（15，6，79）。

2.68 与习题2.67一样，方程组

$$x+y+z=30$$

$$14x+11y+9z=360$$

的解为

$$x=2t, \quad y=45-5t, \quad z=3t-15$$

其中

$$t=5, 6, 7, 8 \text{或} 9。$$

2.69 $$100+x=y^2, \quad 168+x=z^2$$

两式相减得

$$(z-y)(z+y)=68$$

由于$68=2^2\cdot17$只能按下列三种形式分解为两数之积

$$68=1\cdot68=2\cdot34=4\cdot17$$

而y和z必须同时是奇数或同时是偶数，所以只可能有一种情形：

$$z-y=2$$

$$z+y=34$$

于是

$$z=18, \quad y=16, \quad x=156。$$

2.70 （斯坦福大学1957）设鲍勃有x张邮票，第二本里有全部邮票的$\frac{y}{7}$，x和y都是正整数。

$$\frac{2x}{10}+\frac{yx}{7}+303=x$$

故

$$x=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot101}{28-5y}$$

右边分数的分母必须是正奇数，因为它应当除尽分子，而分子是奇数。于是只有三种可能：$y=1$，3和5，代入上式，y 必须等于5，所以 $x=3535$ 唯一确定。

2.71 （斯坦福大学1960）设现价为 x 美分，而存货有 y 支，则 $x<50$，且

$$xy=3193$$

可是 $3193=31\times103$ 是两个素数的乘积，所以它只有四个因数

$$1,\ 31,\ 103,\ 3193$$

若假定 x 是整数，则 $x=1$ 或31，若再假定 $x>1$，则 $x=31$。

2.75 （1）不相容：三个平面中，或有两个平行而不重合，或任意两个平面相交而三条交线平行且不重合，即三个平面没有公共点。

（2）不独立：三个平面交于一条直线；两平面（甚至三平面）重合。

（3）相容且独立：三平面交于一点，即三平面有唯一的公共点。

2.78 现行的中学课本中包含有类型不多但数量很大的“文字题”。而恰恰是那些能说明“笛卡儿模型”价值的问题及其应用却往往是缺乏的。

读者从前面讲过的那些例子里，可以学习怎样从刚解出的题目再引伸出一些有用的问题。下面我列出一些这样的问

题，对每个问题都给出一个例子说明它（读者应该找出更多的实例）。

你能检验所得到的结果吗（习题2.4）？

验证极端（退化，极限）情形（习题2.14）。

你能用不同的方法得出结果吗？比较不同的解法（习题2.8）。

你能给予这一结果别的解释吗（习题2.3）？

把问题加以推广（习题2.2）。

设计一个类似的问题（习题2.47）。

从任一个题目出发，询问一下上述那些问题或是类似的问题，读者都有可能引出一些新的问题，或找到某些有趣而又不太难的问题。总而言之，通过提出这些问题，读者将有机会加深他对问题的理解，并提高解题能力。

下面就是两个从前面的题目引伸出来的（并不那么容易的）问题：

（Ⅰ）验算习题2.35的结果

(1) 假设$\alpha=\delta$，$\beta=\gamma$，$\alpha+\beta=90^\circ$；

(2) 假设$\alpha=\delta$，$\beta=\gamma$，而不预先给出$\alpha+\beta$的值；

(3) 分别以δ，γ，β和α去替代α，β，γ和δ。

（Ⅱ）试考虑类似于习题2.45的立体几何问题（习题3.39有一个提示）。

2.56，2.72，2.73，2.74，2.76，2.77是评注，不存在解的问题。

第 三 章

3.1 对于$n=0$和$n=1$，定理显然成立。假设定理对某个

n成立：

$$(1+x)^n=1+\cdots+\binom{n}{r-1}x^{r-1}+\binom{n}{r}x^r+\cdots+x^n$$

两端均乘以$1+x$，得

$$(1+x)^{n+1}=1+\cdots+\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right]x^r+\cdots+x^{n+1}$$

由§3.6(2)的递归公式，$(1+x)^n$中x^r的系数等于

$$\binom{n+1}{r}$$

于是由假设二项式定理对n成立，推得它对$n+1$也成立。请注意我们也用到了§2.6(2)中的边界条件。用在哪儿？

3.2 假设习题3.1的结果成立，令

$$x=\frac{b}{a}$$

然后去考虑

$$a^n(1+x)^n=(a+b)^n$$

3.3 把命题“S_p是$p+1$阶多项式”，看成是一个猜测（情况本来就是这样）。当$p=0$，1和2时这个猜测确实是对的（命题就是由此启发而得的；见§3.3的开头）。假设这个猜测对于$p=0$，1，2，…，$k-1$都成立，（即对S_0，S_1，S_2，…，S_{k-1}都成立，则我们可得结论（见§3.4最后一个方程）：

$$\binom{k+1}{2}S_{k-1}+\binom{k+1}{3}S_{k-2}+\cdots+S_0=P$$

是一个k阶多项式（这里P是简写符号），于是由上述方程就可以推出

$$(1)\qquad S_k=\frac{(n+1)^{k+1}-1-P}{k+1}$$

因为P是n的k阶多项式，$(n+1)^{k+1}$中最高阶项n^{k+1}不可能被消掉，因此上式表示S_k是n的$k+1$阶多项式。这里我们得到这一结论是假设了S_0是n的1阶、S_1是2阶、…、S_{k-1}是k阶多项式。

直观地看，所考虑的S_k的性质（即S_k是n的$k+1$阶多项式）具有一种“无法抑制的自动延续的趋势”。我们前面已经知道S_0，S_1和S_2具有这个性质；所以由上面的证明，S_3也必须具有这一性质；同理，S_4，S_5等都具有这一性质等等。

由公式(1)显然可得S_k的最高阶项系数为$\frac{1}{k+1}$。

下面一些问题可提供上述结果的其他证法，亦可见习题4.2—4.7。

3.4 $$S_4=S_2\frac{6S_1-1}{5}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

按标准模型作数学归纳法的证明；见MPR，卷Ⅰ，pp.108—120。

3.5 根据§3.2，§3.3，§3.4和习题3.3提出的模型去作。

3.6 类似于3.4：

$$n^k-(n-1)^{k-1}=\binom{k}{1}n^{k-1}-\binom{k}{2}n^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

3.7 类似于§3.4：

$$[n(n+1)]^k-[n(n-1)]^k=n^k[(n+1)^k-(n-1)^k]$$
$$=2\binom{k}{1}n^{2k-1}+2\binom{k}{3}n^{2k-3}$$

$$+2\binom{k}{5}n^{2k-5}+\cdots$$

3.8 类似于§3.4：

$$(2n+1)[n(n+1)]^k-(2n-1)[(n-1)n]^k$$

$$=n^k[(n+1)^k+(n-1)^k]+2n^{k+1}[(n+1)^k-(n-1)^k]$$

$$=2\left[\binom{k}{0}+2\binom{k}{1}\right]n^{2k}+2\left[\binom{k}{2}+2\binom{k}{3}\right]n^{2k-2}$$

$$+\cdots$$

3.9 由习题3.7用递归和数学归纳法可得。

3.10 由习题3.8用递归和数学归纳法可得。

3.11 由习题3.9和3.10只要对$S_1(x)$和

$$S_2(x)=S_1(x)\cdot\frac{2x+1}{3}$$

验证结论即可。

3.12 (*a*) 用“小高斯的方法”（§3.1的第一个方法）

$$[1+(2n-1)]+[3+(2n-3)]+\cdots=2n\cdot\frac{n}{2}=n^2$$

(*b*) 用§3.1的第二个方法；见下面。

(*c*) 推广：考虑首项为a，公差为d，项数是n的等差数列：

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)$$

令最后一项$a+(n-1)d=b$，则（这就是§3.1的第二个方法）

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(b-2d)+(b-d)+b$$

$$S=b+(b-d)+(b-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

两式相加再除以2，便得

$$S=\frac{a+b}{2}n$$

特别地，当$a=1$，$b=2n-1$时，有

$$S=\frac{1+(2n-1)}{2}n=n^2$$

(*d*) 考察图3.9。

(*e*) 见习题3.13。

3.13 $1+4+9+16+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2$

$$-4(1+4+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

3.14 按习题3.13的方法，可得：

$$\frac{4n^2(2n+1)^2}{4}-8\frac{n^2(n+1)^2}{4}=n^2(2n^2-1)$$

3.15 利用习题3.11的符号，可得

$$1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k=S_k(2n)-2^kS_k(n)$$

3.16 多几个问题比仅只有一个问题更容易回答。(这是"发明家的悖论"；见*HSI*，*p*.121。) 与所提的

$$2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2=U$$

一起，我们还考虑

$$1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2=V$$

于是，(由习题3.15) 有

$$U+V+9S_2(n)=S_2(3n)$$

此外有

$$U-V=3+9+15+\cdots+(6n-3)=3n^2$$

这样我们便得到一个未知量为U和V的二元一次方程组，由此不仅解得

$$U=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}$$

同时也得出

$$V=\frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$$

其他解法见习题3.17。

3.17 （见前面第三章注解3所引巴斯卡著作）把§3.3的符号推广（那里处理的是$a=d=1$的特殊情形）令

$$S_k=a^k+(a+d)^k+(a+2d)^k+\cdots+[a+(n-1)d]^k$$

显然，$S_0=n$。在关系式

$$(a+nd)^{k+1}-[a+(n-1)d]^{k+1}$$
$$=\binom{k+1}{1}[a+(n-1)d]^k d+\binom{k+1}{2}[a+(n-1)d]^{k-1}d^2+\cdots$$

中，令n等于1，2，3，…，n，然后相加，便得

$$(a+dn)^{k+1}-a^{k+1}=\binom{k+1}{1}S_k d+\binom{k+1}{2}S_{k-1}d^2+\cdots+S_0 d^{k+1}$$

于是可以逐个地递推得S_1，S_2，…，S_k。试详细做出$a=2$，$d=3$，k=2的情形；见习题3.16。

3.18 由§3.2和§3.3的结果所求的和等于

$$\frac{1.2}{2}\cdot 2+\frac{2.3}{2}\cdot 3+\frac{3.4}{2}\cdot 4+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}\cdot n$$
$$=\frac{1}{2}[(2^3-2^2)+(3^3-3^2)+(4^3-4^2)+\cdots+(n^3-n^2)]$$

$$=\frac{1}{2}(S_3-S_2)$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

3.19 (a) $\frac{n(n^2-1)}{6}$; (b) $1^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^{n-3}\cdots(n-1)^1$;

(c) $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$

3.20 我们已经在§3.1中求出了E_1，在习题3.18 中 求出了E_2。一个更为有效的方法可以基于下述代数学的 经 典事实建立起来：即初等对称多项式可以表为

$$E_1=S_1$$

$$E_2=\frac{S_1{}^2-S_2}{2}$$

$$E_3=\frac{S_1{}^3-2S_3-3S_1S_2}{6}$$

$$E_4=\frac{S_1{}^4+3S_2{}^2+8S_1S_3-6S_1^2S_2-6S_4}{24}$$

的同次幂的和。把它们与 以前 的 结 果（§3.1,3.2和3.3,习题3.4）结合起来。同时再把E_k(通过S_1，S_2，…，S_k)的表示式的某些性质（“等权”）与习题3.9和3.10联 系 起来，就不仅可得到E_k的阶数，同时也能得到最高阶项的系 数

$$E_k(n)=\frac{n^{2k}}{k!2^k}+\cdots$$

当k≥2时，还可以推出$E_k(n)$能被

$$(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)[n(n+1)]^{\left[\frac{3-(-1)^k}{2}\right]}$$

整除。

3.21 方法(a)是方法(b)的特殊情形。事实上，如果仅由A_n成立即可推得A_{n+1}成立，那么，由A_1，A_2，…，A_{n-1}和A_n都成立，自然更能推得A_{n+1}成立。这就是说，如果(Ⅱ$_a$)成立，则(Ⅱ$_b$)一定成立。因此，如果我们认可方法(b)，那就一定也要认可方法(a)。

方法(b)可由方法(a)推出。令B_n表示n个命题A_1，A_2，…A_{n-1}和A_n的全体，则

(Ⅰ)的意思是：B_1成立。

而

(Ⅱ$_b$)简化为：由B_n成立，即可推得B_{n+1}成立。这样，关于序列A_1，A_2，A_3，…的命题(Ⅰ)和(Ⅱ$_b$)就转化为关于B_1，B_2，B_3，…的命题(Ⅰ)和(Ⅱ$_a$)。

3.22 图3.3可以想象成是下述情形的一种表示：柏尼(B)，查理(c)，狄克(D)，罗埃(R)和亚太(A)(由西北到东南的街段)支帐篷，另五个男孩(瑞奇(R)，亚伯(A)，艾尔(A)，艾勒克斯(A)和比尔(B)——从东北到西南的街段)做晚饭。从这个具体情况出发，你就会发现把十个男孩分做不同的两队，每队五人，这种分法，对应于图3.3中由上端到下端的一条最短锯齿状道路，反过来，每一条这种锯齿状道路也都对应一个分法；这个对应是一对一的。所以，所求的分法总数是252。

3.23 我们现在面临的是习题3.22和图3.3中出现的命题的一般情形。前者乃是这个一般命题的一个有代表性的特殊情形（MPR，卷Ⅰ，p.25，习题10）。

把n个元素从1到n标上号，并让巴斯卡三角形的第k条"基线"与第k个元素对应起来。一个元素属于这个子集，

当且仅当锯齿状道路是沿着一个从西北到东南的街段到达这个元素所对应的基线的。按照这种方式任何包含于n个 元素的集合的含 r 个元素的子集，都可以看成是一条终止于某固定点(即第 n 条基线上从左边数过来的第 r 个点)的锯齿状道路，于是这种子集的个数与这种锯齿状道路的数目是一样的。

3.24 有 $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ 条直线和 $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ 个三角形。

3.25 在空间中按"一般位置"给定n个点，则顶点选自给定的 n 个点的四面体有 $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ 个。

3.26 $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$。

3.27 在给定凸多边形内部相交的两条对角线一定是某一个四边形的两条对角线，此四边形的四个顶点选自给定多边形的 n 个顶点。所以问题里的交点数等于

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

3.28 红色的面有

$$\binom{6}{1}=6$$

种不同的取法，剩下的五个面中，蓝色的两个面有

$$\binom{5}{2}-10$$

种不同的取法。所以在六个面上按规定的要求涂三种色，可能的涂法共有

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2}=6\times 10=60$$

种。

3.29 $\binom{n}{r}\binom{s+t}{s}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{(s+t)!}{s!t!}=\frac{n!}{r!s!t!}$

3.30 含 n 个元素的集合分成 h 个互不相交的子集合(即任何两个不同的子集合都没有公共的元素)，使得第一个子集有 r_1 个元素，第二个子集有 r_2 个元素…，最后一个子集有 r_h个元素，这里

$$r_1+r_2+r_3+\cdots+r_h=n$$

这种不同的分法共有

$$\frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\cdots r_h!}$$

种。在这里，子集的标号是很要紧的(即标号不同的子集是不同的)：如果r_1，r_2，…，r_k 中有某些是相等的，我们就必须仔细区分元素个数相等而标号不同的子集。在习题3.22中，我们要区分这五个是支帐篷，那五个是做晚饭的；同样的，在图3.3中，我们要区分两条关于图形中心线（即上端的A与下端的A之间的联线）镜面对称的锯齿状道路。而在习题3.29中，即使 r 和 s 碰巧相等，r 个面的颜色与 s 个面的颜色也是不同的。

3.31 用§3.8里讲的所有四种方法和习题3.23的方法都可以证明它。

(1) 街道网络关于过巴斯卡三角形顶点的铅垂线是对称的。

(2) 递归公式和边界条件也有同样的对称性。

(3) 引进阶乘符号

$$1\cdot2\cdot3\cdots m=m!$$

我们有

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\ r}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\ \cdots\ r}\ \frac{(n-r)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}=\binom{n}{n-r}$$

（4）因为在$(a+b)^n$中，互换a、b的位置，结果不变。所以在展开式中a^rb^{n-r}和$a^{n-r}b^r$的系数应当相等。

（5）如果在n个元素的集合中，取出一个含r个元素的子集，剩下的就是一个含$n-r$个元素的子集，所以这两类子集的个数应当相等。

3.32 $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

证明：在$(a+b)^n$的展开式中取$a=b=1$。另一个证明：从巴斯卡三角形的顶点到第n条基线一共有2^n条最短锯齿状道路，这是显然的，因为在这种道路中，每经过一个街角（即穿过一条基线），再继续往下走时，我们都可能有两种选择。再一个证明：在n个元素的集合里，包含空集合和整个集合（分别是展开式里的$\binom{n}{0}$和$\binom{n}{n}$）在内，一共有2^n个子集。这也是显然的，因为取定一个子集时，任何元素或者属于它，或者不属于它。

3.33 对$n\geqslant 1$，在$(a+b)^n$的展开式中，令$a=1$，$b=-1$，即得

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

另一个证明：由递归公式和边界条件，有

$$\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0}$$

$$-\binom{n}{1} = -\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1}$$

$$\binom{n}{2} = \qquad \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} = \qquad (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}$$

$$(-1)^{n}\binom{n}{n} = \qquad (-1)^{n}\binom{n-1}{n-1}$$

把它们加起来即得。

再一个证明：任何到达第$n-1$条基线的锯齿状道路可以变成两条锯齿状道路。继续向下走到第n条基线，一条通向"正"的街角（$r=0, 2, 4, \cdots$），另一条通向"负"的街角（$r=1, 3, 5, \cdots$）。

3.34 类似的在第四条道上前四个数字的和为

$$1+5+15+35=56$$

一般的，在第r条道上，有：

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

用数学归纳法证明：命题对$n=r$成立，事实上由边界条件有

$$\binom{r}{r}=\binom{r+1}{r+1}$$

现在假设命题对某一个n成立，在所假定的方程两边加上同一个量$\binom{n+1}{r}$，则由递归公式可得

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}+\binom{n+1}{r}$$

$$=\binom{n+1}{r+1}+\binom{n+1}{r}=\binom{n+2}{r+1}$$

因此命题对$n+1$也成立。

这就证明了命题对一切$n\geqslant r$都成立。

另一个证明：在图3.7（Ⅰ）中，A是顶点，L是由$n+1$和$r+1$确定的那个点，由A到L的最短锯齿状道路的数目是$\binom{n-1}{r+1}$。任何一条这种道路从第r条道走到第$r+1$条道总要沿着某一条街走一个街段，而沿第0条街、第1条街、第2条街…走的道路的数目分别是

$$\binom{r}{r},\ \binom{r+1}{r},\ \binom{r+2}{r},\ \cdots,\ \binom{n}{r}$$

它们的和就是由A到L的最短锯齿状道路的总数，即$\binom{n+1}{r+1}$，因此命题成立。

3.35 先沿着西北边界线（第0条道）加这些数，然后是沿第1条道，再是第2条道，…，最后是图3.5中的第5条道，我们分别得出和数

6，21，56，126，252，462

它们的和是923。我们在图3.5这个巴斯卡三角形的有限部分里是找不到这个数的。不过，我们能找到紧邻的下一个数

$$924=\binom{12}{6}$$

现在我们看到了，可以利用习题3.34和二项式系数表，去免除上面繁重的加法运算（包括最后的第七次加法在内）。也就是说，我们把这个有代表性的例子提高一步就容易证明它的一般情形：

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{r=0}^{n}\binom{l+r}{r}=\binom{m+n+2}{m+1}-1$$

3.36 等式左端的各项中，第一个因子取自巴斯卡三角形的第五条基线，而第二个因子则取自第四条基线。右端的数在第九条基线上。与此类似，在例

$$1\cdot1+5\cdot3+10\cdot3+10\cdot1=56$$

中，涉及的是第五条，第三条和第八条基线。而在§3.9里考虑了更一般的情形，它涉及的是第n条，第n条和第$2n$条基线。由这些例子，可导出一般的定理：

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$$

我们在这里实际上推广了符号的意义（即$r>n$或$r<m$或$r>m+n$的情形），正式的提法见习题3.65(Ⅱ)。

§3.9里讲过的那两个证明方法都可以推广到目前这种一般的情形。几何方法由比较图3.7(Ⅰ)与(Ⅱ)可得。分析方法则归结为用两种不同的方法去计算展开式

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

中x^r的系数。

3.37 等式左端的各项中，第一个因子取自巴斯卡三角形的第一条道，第二个因子取自第二条道，而右端则在第四条道上。与此类似，关系式

$$1\cdot10+3\cdot6+6\cdot3+10\cdot1=56$$

涉及第二、第二和第五条道，我们可以把习题3.34和图3.7(Ⅰ)那里处理的一般情形解释成是用类似的方法涉及了第0，

第r和第$r+1$条道的情形。由这些例子可导出一般的定理：

$$\binom{r}{r}\binom{s+n}{s}+\binom{r+1}{r}\binom{s+n-1}{s}+\binom{r+2}{r}\binom{s+n-2}{s}+\cdots+\binom{r+n}{r}\binom{s}{s}=\binom{r+s+n+1}{r+s+1}$$

几何证明：（比习题3.34里的几何证明更一般些；类似于§3.9和习题3.36中的证明）：在图3.7（Ⅳ）中，点L由数$r+1+s+n$（街段总数）和$r+1+s$（向右下方走时，通过的街段数）确定，于是由顶点A到L的全部最短锯齿状道路数目是

$$\binom{r+s+n+1}{r+s+1}$$

任何一条这种道路从第r条道走到第$r+1$条道时总要沿着某一条街走一个街段；等式左边的项是根据所沿街的编号，把道路分成若干类后，分别算出的各类道路数；等式右边是总算出来的道路数。

我们希望这里也有一个跟§3.9和习题3.36平行的分析的证明，在那里公式是通过考虑两个级数的乘积导出的。然而在这里看上去还不那么简单，所以只得暂时留下一个空白。我们还希望能找到在这两个类似的公式——本公式与习题3.36的公式——间的某种（代数？）联系，这又是一个空白。

3.38 第n个三角形数是

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$$

三角形数1，3，6，10，…构成了巴斯卡三角形的第二条道。

3.39 第n个角锥数是

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

这里用了习题3.34的结论。角锥数1，4，10，20，…构成了巴斯卡三角形的第三条道。

附注 三角形数和角锥数的表达式，在有二项式系数的一般显公式（§3.7）之前，就已经知道了，或许正是这些表达式通过归纳才发现了一般公式。

3.40 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3.41 联结顶点和由数

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_h$$

（街段总数）与

$$r=r_1+r_2+\cdots+r_h$$

（从西北到东南的街段数）确定的点的最短锯齿状道路，限制它们必须通过$h-1$个给定的中间点，这些点分别由数

n_1 和r_1

n_1+n_2 和r_1+r_2

. . . .

$n_1+n_2+\cdots+n_{h-1}$ 和$r_1+r_2+\cdots+r_{h-1}$

去确定。

3.42 (a)图3.10表示两条属于集合而不属于子集(1)的道路。它们有同一个起点A和同一个终点C，还通过同一个中间点B，点B在对称轴上，并且把每条道路都分成两段AB和BC。两个AB关于对称轴对称，并且每一个跟对称轴都没有共同的内点。两个BC则重合。这两条道路中，一条属于子集(2)，另一条属于子集(3)。反过来，任何属于(2)或(3)的

道路都可以按图3.10的办法配上另一条道路：找出道路与对称轴的第二个公共点B（顶点A是第一个这种公共点）即可。这种配法建立了子集(2)与子集(3)之间的一一对应。

(b) 我们可以用别的方法去配(2)与(3)的道路：图3.10里，两段弧AB关于过A、B的直线对称，在图3.11里，它们关于AB线段的中点对称。

(c) 由(a)或(b)，有

$$\binom{n}{r} = N + 2\binom{n-1}{r}$$

在下列两个关系式

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad \binom{n-1}{r} = \frac{n-r}{n}\binom{n}{r}$$

中先用一个，然后再用另一个，便得出两个不同的表达式

$$N = \binom{n-1}{r-1} - \binom{n-1}{r} = \frac{2r-n}{n}\binom{n}{r}$$

我们是在 $2r>n$ 的假定下得出这个等式的。不过根据巴斯卡三角形的对称性，很容易取消这一限制。

3.43 用数学归纳法。考察图形，验证命题对$n=1$，2，3（$m=0$，1）成立。

从 $2m$ 到 $2m+1$。由长度为$2m$且与对称轴除顶点外没有别的交点的道路，可以引出两条具同样特性的长度为 $2m+1$ 的道路，*) 若命题对$n=2m$成立，则对$n=2m+1$，便有

$$2\binom{2m}{m}$$

这就是我们所要求的数。

从 $2m+1$到$2m+2$。由长度为 $2m+1$ 并具有上述特性的

---

*) 对称轴只与偶数编号的基线交于某衔角。

道路，在多数情况下都可以引出两条具同样特性，长度为$2m+2$的道路，只有以第$2m+1$条基线上最靠近对称轴的两个点为端点的道路除外。具体到这种情形，如果命题对$n=2m+1$成立，利用习题3.42的结果，对$n=2m+2$，便得所求的数为

$$4\binom{2m}{m}-2\frac{1}{2m+1}\binom{2m+1}{m+1}$$

经过适当的变形，它就等于

$$\binom{2m+2}{m+1}$$

不用数学归纳法。利用习题3.42解法中(c)里得到的N的第一个表达式，考虑和数

$$2\sum\left[\binom{n-1}{r-1}-\binom{n-1}{r}\right]$$

这里和号是对满足$\frac{n}{2}<r\leqslant n$的r求和，它就是我们所要求的数。仔细区分$n=2m$和$n=2m+1$的情形，就得到命题的结论。

3.44　　0，1，6，21，50，90，126，141，126，…

　　0，1，7，28，77，161，266，357，393，357，…

第七条基线上除1，393外，都可被7整除。

3.45 类似于习题3.1。

3.46 类似于习题3.31。

3.47 类似于习题3.32。

3.48 类似于习题3.33。

3.49 类似于§3.9，更一般的推广类似于习题3.36。

3.50 从东北向西南倾斜的直线

1，1，1，1，1，…

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots$$

也是巴斯卡三角形中的"道"。

3.51 因为其他各线也都有我们在第一条线上看到的对称性，所以只要写到第七、八两条基线的中间就行了。

$$\frac{1}{8}\quad \frac{1}{56}\quad \frac{1}{168}\quad \frac{1}{280}$$

$$\frac{1}{9}\quad \frac{1}{72}\quad \frac{1}{252}\quad \frac{1}{504}\quad \frac{1}{630}$$

3.52 在调和三角形的给定"基线"上，分母与二项式系数成比例，比例因子从两端的项便可看出，确切地说，我们发现两个三角形对应位置上的数是

$$\binom{n}{r} \qquad \frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}$$

巴斯卡　　　　莱卜尼兹

证明　当$r=0$，即知调和三角形的边界条件满足此关系。下面再验证递归公式，先利用二项式系数的递归公式，再利用二项式系数的显公式，便得：

$$\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r-1}}+\frac{1}{(n+1)\binom{n}{r}}=\frac{\binom{n+1}{r}}{(n+1)\binom{n}{r-1}\binom{n}{r}}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}\cdot\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}\cdot\frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$=\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}=\frac{1}{n\binom{n-1}{r-1}}。$$

3.53 等式左边都是图3.13中某一条道的首项，而等式

右边是下一条道所有项的和。其证明见习题3.54的解法。

3.54 利用莱卜尼兹三角形的递归公式，有

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$$

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{42}=\frac{1}{105}$$

$$\cdots\cdots$$

把它们加起来。（第二条道“远处”的项可以“忽略不计”。）根据这个有代表性的特殊情形，我们不难得到一般的命题：在莱卜尼兹三角形中，某一条道上以某一个数为首项的所有的数，朝西南方向加下去（无穷多项）所得的和等于首项西北紧邻。如果把

“莱卜尼兹”“无穷多项”“西南”“西北”

变成“巴斯卡”“有穷多项”“东北”“东南”

现在这个结果就变成习题3.34的结果，从这里可以看到习题3.51里所说的“对比模拟”的另一个实例。

3.55 由调和三角形一般项的显公式（见习题3.52）可以看出，本题的第$r-1$行和习题3.53的对应的行只差一个因子$\frac{1}{(r-1)!}$，这里$r=2, 3, \cdots$，所以它的和是

$$\frac{1}{(r-1)!(r-1)}$$

3.57 乘积等于1。熟悉无穷级数理论的读者不仅是从

形式运算上了解方程

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

而且知道它在什么条件下有意义，也知道它的严格推导。

3.58 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$；习题3.57是一个特殊情形。

3.59 每一个级数都对应巴斯卡三角形的一条道，第一个级数见习题3.57。重复运用习题3.58和习题3.34，便得

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=(1+x+x^2+\cdots)^2$$

$$1+3x+6x^2+10x^3+\cdots=(1+x+x^2+\cdots)^3$$

一般的

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}x+\binom{r+2}{r}x^2+\cdots+\binom{r+n}{r}x^n+\cdots$$

$$=(1+x+x^2+\cdots)^{r+1}=(1-x)^{-r-1}$$

形式的证明可用数学归纳法。

3.60 用两种不同的方法计算乘积

$$(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}$$

中 x^n 的系数。它跟习题3.36解法中的分析方法（即§3.9(3)里的方法）极为类似。

3.61 分别是1，0，0，0。这可以看作是对猜测N的肯定。

3.62 用两种本质上不同的方法算出它们，分别是$\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{9}$，$\frac{4}{81}$，$-\frac{7}{243}$。这可以看作是对猜测N的又一次肯定。

3.63 $(1+x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{2}{3}}$

$$=\left(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\cdots\right)$$

$$\times\left(1+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{4x^3}{81}-\frac{7x^4}{243}+\cdots\right)$$

$$=1+x+0x^2+0x^3+0x^4+\cdots$$

这更进一步肯定了猜测N。

3.64 由习题3.57，有

$$1+\frac{-1}{1}x+\frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$$=[1-(-x)]^{-1}=(1+x)^{-1}$$

这样又从一个十分不同的方面肯定了猜测N。习题3.59的那些级数也能从猜测N导出吗？

3.65 $$\binom{r-1-x}{r}=\frac{r-1-x}{1}\frac{r-2-x}{2}\cdots\frac{-x}{r}$$

$$=(-1)^r\frac{x}{1}\cdots\frac{x-r+2}{r-1}\frac{x-r+1}{r}$$

3.66 按照猜测N，$(1+x)^{-r-1}$的表达式中x^n的系数是$\binom{-r-1}{n}=(-1)^r\binom{n+r}{n}=(-1)^n\binom{r+n}{r}$；这里我们先用了习题3.65(Ⅰ)，然后假设$r$是非负整数并用了习题3.31。把$x$换成$-x$，则$x^n$变成$(-1)^nx^n$，这样我们就得到习题3.59的一般结果，它证明了猜测N对一类重要的特殊情形即a为负整数的情形是成立的。

3.67 由

$$\left[\binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\cdots+\binom{a}{r}x^r+\cdots\right]$$

$$\times\left[\binom{b}{0}+\cdots+\binom{b}{r-1}x^{r-1}+\binom{b}{r}x^r+\cdots\right]$$

$$=\binom{a+b}{0}+\binom{a+b}{1}x+\cdots+\binom{a+b}{r}x^r+\cdots$$

可得（习题3.56）

$$(*)\ \binom{a}{0}\binom{b}{r}+\binom{a}{1}\binom{b}{r-1}+\cdots+\binom{a}{r}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{r}$$

若取$a=m$，$b=n$，这就是习题 3.36 的结果。不过这里定义域是不同的，在前面 m 和 n 限制为非负整数，而这里 a 和 b 是没有限制的，可以是任何数。

3.68 由猜测N导出的关系式（$*$）并没有得到证明，仅仅是一个猜测。

（$*$）的特殊情形——即a和b是正整数的情形，已经在习题3.36中证明了。另外由习题3.66的解法可知 a 和 b 是负整数的特殊情形等价于习题3.57的结果，因而也已经证明了。（注意，（$*$）给出了习题3.36和习题3.37之间的联系，这是我们希望得到的，见习题3.37解法末尾的注记。）

我们能利用习题3.36（它是（$*$）的一个重要特殊情形）作为跳板全部证出（$*$）吗？（如果我们知道有关的代数事实："两个变量 x 和 y 的多项式当 x和 y 取正整数值时等于零则恒等于零。"我们就能证明它。）

令

$$\binom{a}{0}+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\cdots+\binom{a}{n}x^n+\cdots=f_a(x)$$

关系式（$*$）与关系式

$$f_a(x)f_b(x)=f_{a+b}(x)$$

实质上是等价的。假定（$*$）已经成立了，则

$$f_a(x)f_a(x)f_a(x)=f_{2a}(x)f_a(x)=f_{3a}(x)$$

一般的，对任何正整数 n 都有

$$[f_a(x)]^n = f_{na}(x)$$

设 m 是一个（正的或负的）整数，由于我们已经证明了猜测 N 对 a 取正、负整数值时都是对的（习题3.1和习题3.66），所以

$$[f_{\frac{m}{n}}(x)]^n = f_m(x) = (1+x)^m$$

$$f_{\frac{m}{n}}(x) = (1+x)^{\frac{m}{n}}$$

因此由(*)可导出猜测 N 对指数 a 取一切有理数值都是对的。

（实际上，最后一步是比较冒险的，因为在开 n 次根时，我们无法确定哪一个可能取的值是我们所应该取的，这样我们便留下了一个空白，如果我们停留在习题3.56，从纯粹形式的角度出发，这个空白是很难补上的。不过，我们已经发现构造完整的证明所必需的一切了。距牛顿写这封信一个半世纪以后，1826年，出现了伟大的挪威数学家 $N.H.$阿贝尔的一篇论文，在这篇论文里，他对于复值的 x 和 a，讨论了二项式级数的收敛性及其值，大大地推进了无穷级数的一般理论。请参看他的全集，1881年，第一卷 $pp.$ 219—250。）

369. 1，2，6，20在巴斯卡三角形的对称轴上。解释：x^n 的系数是

$$\begin{aligned}(-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= 4^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{n!\,n!}\\ &= \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

3.70

$a_0u_0=b_0$

$a_0^2u_1=a_0b_1-a_1b_0$

$a_0^3u_2=a_0^2b_2-a_0a_1b_1+(a_1^2-a_0a_2)b_0$

$a_0^4u_3=a_0^3b_3-a_0^2a_1b_2+(a_0a_1^2-a_0^2a_2)b_1-(a_1^3-2a_0a_1a_2$
$+a_0^2a_3)b_0$

3.71 习题3.70处理过的$n=0$，1，2，3的情形预示我们$a_0{}^{n+1}u_n$是a和b的一个多项式，它的各项都有下列性质：

（1）关于a都是n阶

（2）关于b都是1阶

（3）a，b合在一起的权为n。

理由是：

（1）如果a_n换成a_nc（$n=0$，1，2，…，c任意），u_n必须换成u_nc^{-1}。

（2）如果b_n换成b_nc，u_n必须换成u_nc，

（3）如果a_n和b_n分别换成a_nc^n和b_nc^n（如象用cx替换x的结果一样）那么u_n必须换成u_nc^n。

3.72 $u_n=b_n-b_{n-1}$：如果把u_n用a和b表示，令$a_0=a_1=a_2=a_3=\cdots=1$，得到的结果就应当是它。这是一个有价值的验算；试对$n=0,1,2,3$进行（习题3.70）。

3.73 $u_n=b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n$（见习题3.58）；如果把$u_n$用$a$和$b$表出，令$a_0=1$，$a_1=-1$，$a_2=a_3=\cdots=0$，得到的结果就应当是它。这是一个有益的验算；试对$n=0$，1，2，3进行（习题3.70）。

3.74

$$1-\frac{x}{6}+\frac{x^2}{40}-\frac{x^3}{336}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)(2n+1)}+\cdots$$

参见MPR，卷Ⅰ，$p.84$，习题2。

3.75

$a_1u_1=1$

$-a_1^3u_2=a_2$

$a_1^5u_3=2a_2^2-a_1a_3$

$-a_1^7u_4=5a_2^3-5a_1a_2a_3+a_1^2a_4$

$a_1^9u_5=14a_2^4-21a_1a_2^2a_3+3a_1^2a_3^2+6a_1^2a_2a_4-a_1^3a_5$

3.76 习题3.75处理过的情形启示我们$a_1{}^{2n-1}u_n$是a的一个多项式，它的每一项是

（1）$n-1$阶的，且

（2）权为$2n-2$。

理由是：

（1）如果把a_n换成a_nc（如象用$c^{-1}x$替换x的结果一样），u_n必须换成u_nc^{-n}。

（2）如果a_n换成a_nc^n（如象用cy替换y的结果一样），u_n必须换成u_nc^{-1}。

3.77 $x=\frac{y}{1-y}$，$y=\frac{x}{1+x}$，于是

$$y=x-x^2+x^3-x^4+\cdots$$

因此，如果在习题3.75中，令$a_n=1$，我们必定得到$u_n=(-1)^{n-1}$。这是一个有益的验算；试对$n=1$，2，3，4，5进行。

3.78 $1-4x=(1+y)^{-2}$或

$$y=-1+(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=2x+6x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n-\cdots$$

见习题3.69。

3.79 $\quad y=-1+(1+4ax)^{\frac{1}{2}}(2a)^{-1}$

$$=x-ax^2+2a^2x^3-5a^3x^4+14a^4x^5-\cdots$$

x^n 的系数是

$$\frac{(4a)^n}{2a}\binom{1/2}{n}=\frac{(-1)^{n-1}a^{n-1}}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

（算法与习题3.69类似），若令$a_1=1$，$a_2=a$，$a_3=a_4=\cdots=0$，则习题3.75的 u_n 就是它。参考MPR，卷 I，$p.$102，习题 7，8，9。

3.80 $\quad y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$

3.81 $\quad u_0=u_1=u_2=1$，$u_3=\dfrac{4}{3}$，$u_4=\dfrac{7}{6}$。

3.82 数学归纳法：结论对于 $n=3$ 成立。假设 $n>3$，若对 u_n 以前的那些系数都已有

$$u_{n-1}>1,\ u_{n-2}>1,\ \cdots,\ u_3>1$$

则因为，$u_0=u_1=u_2=1$，即得

$$nu_n=u_0u_{n-1}+u_1u_{n-2}+\cdots+u_{n-1}u_0>n,\quad 即\ u_n>1。$$

3.83 令

$$y=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot 1u_2+\cdots+n(n-1)u_nx^{n-2}+\cdots$$

由微分方程可得

$$n(n-1)u_n=-u_{n-2}$$

又由初始条件得

$$u_0=1,\ u_1=0$$

最后，对$m=1, 2, 3, \cdots$，有

$$u_{2m}=\frac{(-1)^m}{(2m)!},\ u_{2m-1}=0$$

$$y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

3.84 $B_n=B_{n-5}+A_n$

$C_n=C_{n-10}+B_n$

$D_n=D_{n-25}+C_n$

$E_n=E_{n-50}+D_n$

由最后一个方程，对$n=100$，得

$$E_{100}=E_{50}+D_{100}$$

而对前一个方程，对$n=20$，由于$D_{-5}=0$（我们规定所引进的量，当它的足码为负数时，就等于0。）有

$$D_{20}=C_{20}$$

这些例子说明所得方程组的主要特征：我们可以计算任何未知量(例如E_{100})，如果足码比它小的同类未知量（例如E_{50}）和别的较低类别的未知量，(即字母表里的次序排在前面的字母所表示的未知量，例如D_{100})已经算出来了的话。(有的时候只需要预先算出一个未知量就可以了，例如D_{20}。在另一些情形，我们需要某些“边值”，它们是在建立方程前就已经知道的，即B_0，C_0，D_0，E_0和一切$A_n, n=0, 1, 2, \cdots$，的值）简言之，我们计算未知量是上溯到足码小的同类未知量和字母表里更靠前的字母所表示的未知量，最后上溯到边值。（不要让符号的差别掩盖了这种算法与§3.6(2)里用递归公式和边界条件确定二项式系数两者之间的类似之处。）

读者应当建立一种简单的计算方案去验算下列数值

$$B_{10}=3,\ C_{25}=12,\ D_{50}=49,\ E_{100}=292$$

（关于这一问题，更详细的叙述和具体的解释，见 HSI, p.238,习题 20 和美国数学月刊 American Mathematical Monthly,63卷，1956，pp.689－697。）

3.85 数学归纳法：假定 $y^{(n)}$ 具有所假设的形式，再作一次微分，便得

$$y^{(n+1)}=(-1)^{n+1}(n+1)!x^{-n-2}\ln x$$
$$+(-1)^n x^{-n-2}[n!+(n+1)c_n]$$

如果记

$$c_{n+1}=n!+(n+1)c_n$$

这就是我们所要的形式。把上述等式变成

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{c_n}{n!}+\frac{1}{n+1}$$

并利用$c_1=1$，便得

$$c_n=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

3.86 求几何级数的和就是一个与它密切相关的问题：它的结果及通常的推导方法，下面都要用到。

记S为所求的和。则

$$(1-x)S=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

因此，所求的简单表达式是

$$S=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

3.87 利用习题3.86的方法、符号和结果，记T为所求

的和，考虑

$$(1-x)T = 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n$$
$$= 2S-(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-n^2x^n$$

于是由代数运算得

$$T = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

3.88 由习题3.86和3.87，我们可以用递归方法找出

$$1^k+2^kx+3^kx^2+\cdots+n^kx^{n-1}$$

的一个表达式，这只要把k的情形归结为 $k-1, k-2, \cdots, 2$ 1和0的情形即可。

3.89 数学归纳法。结论对 $n=1$ 显然成立，而

$$\frac{a_n(n+\alpha)-a_1(1+\beta)}{\alpha-\beta}+a_{n+1}$$
$$=\frac{a_{n+1}(n+1+\beta)-a_1(1+\beta)}{\alpha-\beta}+a_{n+1}$$

3.90 把习题3.89应用到

$$a_1=\frac{p}{q},\ \alpha=p,\ \beta=q-1$$

的情形，所求的和便等于

$$\frac{p}{p-q+1}\left(\frac{p+1}{q}\frac{p+2}{q+1}\cdots\frac{p+n}{q+n-1}-1\right)$$

3.91 (1) 8，$4\sqrt{2}$，$4\sqrt{3}$，6。

(2) $C_n=2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$，$I_n=2n\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}$。

因此，用熟知的三角恒等式可直接证明。

3.92 关于数学归纳法的更多的例子可见脚注5）所引的书。与第二部分和第三部分习题有联系的习题可以在概率论

计算和组合分析的书中找到。与第四部分习题或习题3.53到3.55有联系的习题可以在无穷级数或复变函数的书中找到。与习题3.81，3.82和3.83密切相关的习题则可以在微分方程论的章节中找到。

能够引出进一步的例子的话题还有很多，象多项式系数（参考习题3.28，3.29，3.30）就是一例。三项式

$$(a+b+c)^n$$

当$n=0$，1，2，3，…时的展开式的系数，可以联系到空间第一卦限里的格子点，正象二项式$(a+b)^n$在巴斯卡三角形里的系数可联系到平面上第一象限里的格子点一样。那么，类似于边界条件，递归公式，巴斯卡三角形里的“道”、“街”、“基线”，以及习题3.31—3.39在空间的情形下又是些什么？跟习题3.44—3.50相联系的又是些什么？我们还没有提到二项式或多项式系数的数论性质，还有其他等等。

3.56 是评注，不存在解的问题。

第　四　章

4.1 设A表示棱锥中与底相对的顶点（即“尖顶”），将棱锥的底剖分成面积分别为

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

的n个三角形。每一个这样的三角形都是一个四面体的底，使得A是四面体与底相对的顶点，而h是它的高。于是棱锥便（由过A的平面）剖分成n个体积分别为

$$V_1, V_2, \cdots, V_n$$

的四面体。显然

$$B_1+B_2+\cdots+B_n=B$$

$$V_1+V_2+\cdots+V_n=V$$

假定所要求的体积的表达式对四面体这种特殊情形已经证明，则有

$$V_1=\frac{1}{3}B_1h,\ V_2=\frac{1}{3}B_2h,\cdots,V_n=\frac{1}{3}B_nh$$

把这些特殊的关系式加起来（叠加！）便得出一般的关系式

$$V=\frac{1}{3}Bh$$

4.2 k 阶多项式的形状是

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$$

其中$a_0\neq0$。相继让x等于1，2，3，…和n，并把它们加起来，利用习题3.11的符号，便得

$$\begin{aligned}&f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\\&=a_0S_k(n)+a_1S_{k-1}(n)+\cdots+a_kS_0(n)\end{aligned}$$

等式右端由习题 3.3 的结果乃是一个 n 的 $k+1$ 阶多项式。

4.3 我们把习题 3.34 的结果写成下列形式

$$\binom{0}{r}+\binom{1}{r}+\binom{2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

见习题3.65（Ⅱ），假定习题 4.4 已证明，则我们可以把所设多项式写成

$$f(x)=b_0\binom{x}{k}+b_1\binom{x}{k-1}+\cdots+b_k\binom{x}{0}$$

这里$b_0=k!\ a_0\neq0$（见习题 4.4 的解法），依次让 x 等于0，1，2，3，…，n，然后把它们相加，利用上面写出的习题 3.34 的结果，可得

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

$$=b_0\binom{n+1}{k+1}+b_1\binom{n+1}{k}+\cdots+b_k\binom{n+1}{1}$$

等式右端乃是 n 的一个 $k+1$ 阶多项式。

4.4 比较所求恒等式两端 x^k（即 x 的最高次幂）的系数，得

$$a_0=\frac{b_0}{k!}$$

于是，由所求恒等式得

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k-k!a_0\binom{x}{k}$$

$$=b_1\binom{x}{k-1}+\cdots+b_k\binom{x}{0}$$

再比较两端x^{k-1}的系数，便可以用a_0和a_1把b_1表出来，继续照此办理，便可用递归方法逐个定出b_0，b_1，b_2，…，b_k。

4.5 我们必须确定四个数 b_0，b_1，b_2，和 b_3，使得

$$x^3=b_0\binom{x}{3}+b_1\binom{x}{2}+b_2\binom{x}{1}+b_3\binom{x}{0}$$

是 x的恒等式。也就是说

$$x^3=\frac{b_0}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{b_1}{2}(x^2-x)+b_2x+b_3$$

比较x^3，x^2，x^1和x^0的系数，便分别得出下列方程

$$1=\frac{b_0}{6}$$

$$0=-\frac{b_0}{2}+\frac{b_1}{2}$$

$$0=\frac{b_0}{3}-\frac{b_1}{2}+b_2$$

$$0=b_3$$

由此可导出

$$b_0=6,\ b_1=6,\ b_2=1,\ b_3=0$$

因而，由习题 4.3 的推导($k=3$)经过代数运算便得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

$$=\frac{(n+1)^2n^2}{4}$$

4.6 习题 4.3 已经证明存在五个常数c_0，c_1，c_2，c_3，和c_4，使得等式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=c_0n^4+c_1n^3+c_2n^2+c_3n+c_4$$

对一切正整数 n 都成立。依次令 $n=1$，2，3，4和5，便得到五个未知量c_0，c_1，c_2，c_3，和c_5，五个方程的线性方程组，解之即得

$$c_0=\frac{1}{4},\ c_1=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{4},\ c_3=0,\ c_4=0$$

所得到的结果与习题4.5相同，不过要麻烦些。

4.7 由习题 4.3 可以给出习题 3.3 的结论的一个新的证明，只有一点例外，即由习题4.3的推导，$S_k(n)$ 表达式中 n^{k+1} 的系数是不确定的（不过，稍加一点注解，也可以得出这个系数）。

4.8 是一致的，因为直线的方程形状是

$$y=ax+b$$

其右端是一个阶数$\leqslant 1$的多项式。

4.9 直观上看，与x轴重合的直线是最简单的插值曲线，它对应于恒等于零的多项式。任何别的插值多项式必定是高阶的，即至少是 n 阶的，因为它有 n 个不同的零点x_1，x_2，…，x_n。

4.10 由§4.3里最后公式给出的拉格朗日插值多项式阶数$\leqslant n-1$，我说它是唯一的一个这一低阶数的插值多项式。事实上，如果有两个阶数都$\leqslant n-1$的多项式，在n个给定的横坐标上取相同的值，于是它们的差便有n个不同的零点，这就产生零点个数高于阶数的情形，故此差必须恒等于0。这个阶数$\leqslant n-1$的唯一的拉格朗日插值多项式，其阶数当然是最低的。

4.12 (*a*)显然，因为对于常数c_1和c_2有

$$(c_1y_1+c_2y_2)'=c_1y_1'+c_2y_2'$$

(*b*)$y=e^{rx}$是微分方程的一个解当且仅当r是代数方程

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的一个根。

(*c*)如果(*b*)里r的方程有d个不同的根r_1，r_2，…，r_d，而c_1，c_2，…，c_d是任意的常数，则

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots+c_de^{r_dx}$$

是微分方程的一个解，当$d=n$时，它就是最一般的解（这一点是可以证明的）。

4.13 r的方程是

$$r^2+1=0$$

所以微分方程的通解是

$$y=c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}$$

根据初始条件得方程组

$$c_1+c_2=1,\ ic_1-ic_2=0$$

由此解得c_1和c_2，因此所求的方程特解是

$$y=\frac{(e^{ix}+e^{-ix})}{2}$$

请注意$y=\cos x$也同时满足微分方程和初始条件。见习题3.83。

4.14 (a) 显然。

(b) $y_k=r^k$是差分方程的解当且仅当r是习题4.12(b)中给出的代数方程的根。

(c) 如果习题4.12(b)里的方程有d个不同的根r_1，r_2，…，r_d而c_1，c_2，…，c_d是任意常数，则

$$y_k=c_1r_1{}^k+c_2r_2{}^k+\cdots+c_dr_d{}^k$$

是差分方程的一个解，而当$d=n$时，它就是最一般的解（这一点是可以证明的）。

4.15 r的方程是

$$r^2-r-1=0$$

所以差分方程的通解是

$$y_k=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

于是对于k＝0和k＝1（由初始条件）有方程组

$$c_1+c_2=0,\quad c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

它们确定了c_1和c_2，因此所要找的费波那契数的表达式乃是

$$y_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

4.16 如果实际运动可以通过三个虚拟运动的叠加得到，那么运动质点在时刻t的坐标便是

$$x=x_1+x_2+x_3=tv\cos\alpha$$

$$y=y_1+y_2+y_3=tv\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

消去 t 便得到抛射体的轨道

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$$

这是一条抛物线。

4.18 这里有两个未知量：四面体的底与高，见图4.5a。

4.19 令

V	四面体的体积
B	它的底
H	它的高
h	底上垂直于长度为 a 的棱的高

则

$$V=\frac{BH}{3},\quad B=\frac{ah}{2}$$

所以

$$V=\frac{ahH}{6}$$

可是 h 和 H 都没有给出来。

4.20 我们的四面体（习题4.17的）在一个平面上的正交投影是一个正方形，此平面垂直于长度为b的直线，且过它的一个端点。正方形的对角线长度为 a，它的面积是$\frac{a^2}{2}$，正方形本身乃是一个高为b的正棱柱的底，见图4.5b。这个棱柱（见图4.5b）被剖分成五个（互不重叠的）四面体，习题4.17的四面体是其中之一（它的体积记为V）。其余的四个都是合同的，每一个的底都是一个面积为$\frac{a^2}{4}$的等腰直角三角形，

每一个的高都是 b。于是

$$\frac{a^2b}{2}=V+4\frac{a^2b}{12}$$

$$V=\frac{a^2b}{6}$$

4.21 过长度为 a 的一条棱和与它相对的另一条棱的中点的平面是我们四面体的对称面，它把四面体分为两个合同的四面体（见图4.5c）。它们公共的底（一个等腰三角形）的面积显然是$\frac{ab}{2}$，它们的高是$\frac{a}{2}$。所以所求的体积

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{ab}{2}=\frac{a^2b}{6}$$

（这样的对称面共有两个，它们把我们的四面体分成了四个合同的四面体；由此可得问题的另一个稍微有点不同的解法。）

4.22 我们可以把习题 4.17 里的四面体看成是一个退化的棱台，其高为b，而每个底都缩成为一个长度为 a 的线段，中截面是一个边长为$\frac{a}{2}$的正方形，见图4.5d，于是

$$h=b,\ L=0,\ M=\frac{a^2}{4},\ N=0$$

由棱台公式，$V=\frac{a^2b}{6}$。

4.23 如果习题4.19里找到的那个 V 的表达式与习题4.20，4.21和4.22用三种不同的方法得出的结果一致的话，我们就应该有

$$Hh=ab$$

然而我们可以用两种不同的方法，通过计算四面体被对称面所截得的那个等腰三角形（习题4.21，图4.5e）的面积，去

独立地证明这个关系式。于是我们便找到了从习题4.18出发接着通过习题4.19的第四种（比较曲折的）解法。

4.24 由习题4.18通过习题4.19到习题4.23的证明路线太长了而且也太曲折。习题4.21的解法看上去最漂亮；它充分利用了图形的对称性——但恰恰由于这个理由，它不太可能应用到非对称的情形。因此，乍看上去，显然应是习题4.20当选。你能看出习题4.20当选的其他因素吗？

4.25 $L=M=N$，于是$V=Lh$。

4.26 $N=0$，$M=\frac{L}{4}$，于是$V=\frac{Lh}{3}$。

4.27 令L_i，M_i，N_i和V_i分别表示在P_i中的与P中的L，M，N，和V相当的量，$i=1, 2, \cdots, n$，所有的棱台高都等于h。显然

$$L_1+L_2+\cdots+L_n=L$$

$$M_1+M_2+\cdots+M_n=M$$

$$N_1+N_2+\cdots+N_n=N$$

$$V_1+V_2+\cdots+V_n=V$$

把这些方程加起来，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i+4M_i+N_i}{6}h-V_i\right)=\frac{L+4M+N}{6}h-V$$

我们把等式右边看作一项；等式左边是n个和它类似的项的和。如果我们方程里$n+1$项中有n项都等于零，那么剩下的那一项也必等于零。

4.28 我们的四面体在通过l的平面上的正交投影是一个四边形（对于习题4.20的特殊情形，它是一个正方形，见图4.5b，但一般说来，它是不规则的四边形）。这个四边形

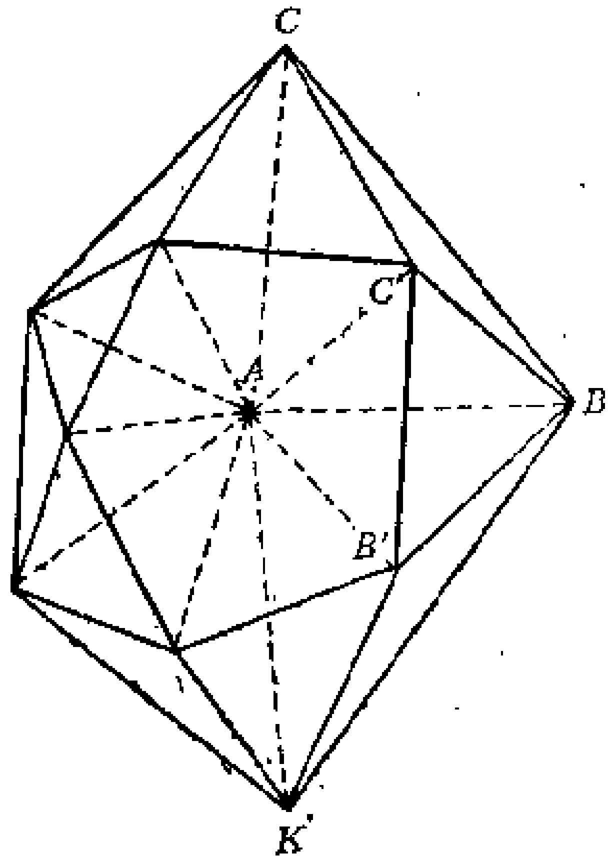
的一条对角线是棱 l，另一条对角线平行且等于 n。这个四边形是一个高为 h 的棱柱的底；这个棱柱被剖分为五个四面体；其中之一是我们的四面体，其余四个是习题4.26情形下所刻划的棱锥，因此棱台公式对它们是成立的。由习题4.25，此公式对于棱柱也是成立的，因此，由习题4.27，对于我们的四面体也是成立的。

4.29 图S4.29是一个棱台；B，C，…，K是下底的顶点（在纸平面上），而B'，C'，…，K'是上底的顶点。

（1）考虑一个棱锥：它以棱台的上底为底，尖顶（底对面的顶点）是下底面上（任意选择）的一点A。

（2）联结A和下底面的顶点B，C，…，K。这样所得到的每一线段都对应上底的一条边（棱台的一条棱）；这种线段和上底面的边构成一个四面体的一对相对的棱。（例如，线段AB对应于边$B'C'$，它们作为一对相对的棱一起确定了四面体$ABB'C'$。）

（3）连结A和顶点B，C'…，K 的直线把下底分成一些三角形。每一个这样的三角形都对应了上底的一个顶点，它们构成了一个棱锥，三角形是棱锥的底，对应的顶点是棱锥的尖顶，（实际上这是一个四面体；例如ABC与顶点C'相对应，它们构成棱锥 ABC–C'）。我们的棱台剖分成一些由（1），(2)和(3)引进的立体（这些立体是这样构成的，由上底(1)取面，(2)取边，(3)取顶点，由下底(1)取一个点，(2)取划分线段，(3)取面。）将习题4.26应用到(1)和(3)引进的棱锥，将习题4.28应用到(2)引进的四面体。利用习题4.27，你就可以对图S 4.29中的棱台$BC\cdots KB'C'\cdots K'$证明棱台公式。



图S1.29

4.30 习题 4.28 的解法是不完善的，因为它只讨论了三种可能情形中的一种。考虑两个线段：l 和 n，以及 n 在通过 l 平行于 n 的平面上的正交投影 n'。考虑分别包含这两个线段的两条直线，和这两条直线的交点 I。这里会有下列三种可能的情形：点 I 可能：

(0) 既不属于线段 l，也不属于线段 n'，

(1) 只属于一条线段，或

(2) 同时属于两条线段。

习题4.20只讨论了(2)的情形。然而情形(1)里的一个四面体可以看作是情形(2)里两个四面体的差，情形(0)里的一个四面体可以看作是情形(1)里的两个四面体的差。由习题

4.27，上面这几句话就使得习题4.28的证明完善了。

4.31 图S4.29有两个限制：

(1) 两个底都是凸多边形。

(2) 任一个底的任一个顶点都与另一底的一条边相对应（有一个一一对应）；两条侧棱起于这个顶点止于这条边的两个端点。（例如，顶点B对应于棱$B'C'$，顶点C'对应于棱BC。）

条件(2)实际上比它表现出来的限制要弱：很多不直接满足这个限制的图形是退化的情形，而我们的证明可以（利用连续性或适当的说明）推广到这些情形。

习题4.35的证明不受(1)和(2)的限制，但用到了积分计算。

4.32 $n=0$；则$L=M=N=1$，$I=2$；公式成立。

$n=2m-1$，奇数；$-L=N=1$，$M=I=0$；公式成立。

$n=2m$，偶数；$L=N=1$，$M=0$，$I=\frac{2}{n+1}$；公式对$n=2$成立，而对其他正偶数都不成立。

4.33 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$；把习题4.32，$n=0$，1，2，3的特殊情形叠加起来。

4.34 代换

$$x=a+\frac{h(t+1)}{2}$$

把区间$a\leqslant x\leqslant a+h$变成区间$-1\leqslant t\leqslant 1$，而把任何阶数$\leqslant 3$的$x$的多项式变成另一个$t$的同类型的多项式。

4.35 我们引进一个直角坐标系x，y，z。设棱台的下底

在 $z=0$ 平面上，它的上底在 $z=h$ 平面上。棱台的体积可以表成

(1) $$V=\int_0^h Q(z)dz$$

其中 $Q(z)$ 表示平行于下底且与下底距离为 z 的平面与棱台的截面的面积。

如果棱台有 n 个侧棱，这个截面就是一个 n 边多边形；如果第 i 条侧棱的方程是

(2) $x_i=a_iz+c_i,\quad y_i=b_iz+d_i$

其中，a_i,b_i,c_i,d_i是由棱的位置所决定的常数；则这个多边形的面积可以表成

(3) $Q(z)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)$

这里我们认为第 $n+1$ 条棱跟第 1 条棱是重合的，所以

$$a_{n+1}=a_1,\quad b_{n+1}=b_1,\quad \cdots,\quad y_{n+1}=y_1$$

方程(2)和(3)表示$Q(z)$是一个阶数不超过2 的 z 的多项式，因此，由习题4.34，习题4.32里叙述的辛卜生公式可以用于积分(1)，注意到下底，中截面和上底的面积分别是

$$Q(o)=L,\ Q(\frac{h}{2})=M,\ Q(h)=N$$

便可得出习题4.22里叙述的棱台公式。

4.11，4.17，4.36是评注，不存在解的问题。

第　五　章

5.1 未知量是数V。

已知量是数 a 和 h。

条件为V是正棱柱体积，它的高为 h，它的底是边长为 a 的正方形。

5.2 有两个未知量，实数 x 和 y。或仅有一个二元未知量，其分量为 x 和 y。它在几何上可以解释为平面上具有直角坐标 x 和 y 的一个点。

条件完全由所给的方程表示。

我们这里不需要考虑已知量（假如我们改变一下问题，把给定方程右端的 1 换成r^2，则r即为已知量）。

一个解是$x=1$，$y=0$；另一个解是 $x=-\frac{3}{5}$，$y=-\frac{4}{5}$；等等。从几何上解释，整个解集合由以原点为中心半径为 1 的圆周上的点组成。

5.3 无解：解集合是一个空集合。

5.4 有八个解

(2, 3) (3, 2) (−2, 3) (−3, 2) (2, −3) (3, −2) (−2, −3) (−3, −2)

解的集合由以原点为中心，$\sqrt{13}$为半径的圆周上的格子点所组成。（两个直角坐标均为整数的点称为格子点。格子点的分布在数论和结晶学等学科中是很重要的。）

5.5 我们把三个未知量(x, y, z)解释为空间内以x, y, z为直角坐标的一个点。

(1) 解集合由一个正八面体的内部的点组成，这个正八面体的中心为原点，它的六个顶点为

(1, 0, 0), (−1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, −1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, −1)

(2) 解集合由正八面体内部的及面上的点所组成。

5.6 下面的叙述将问题的主要部分突出地表示出来了：若a，b，c是直角三角形的边长，a是斜边长，则

$$a^2=b^2+c^2$$

5.7 我们必须把定理用常见的“若…则…”形式（这时假设和结论都很明显）复述成两个并列的命题：

“若n是一平方数，
则$d(n)$是奇数。”
“若$d(n)$是奇数，
则n是一平方数。”

若用“当且仅当”，则可把叙述简化为

“当且仅当n为一平方数时，
$d(n)$是奇数。”

5.16 先考虑凸多边形的情形，把那些为了处理一般情形需要作的变动放到后面去考虑。

（1）给出联接某一选定的顶点到其它$n-1$个顶点的$n-1$条线段的长，和每两个相邻线段之间（共$n-2$个）的夹角。

（2）把多边形用$n-3$条对角线分成$n-2$个三角形，如果给定这些对角线和多边形的边，则这些三角形（三边已给定）是完全确定的。

（3）采用（2）中所考虑的对多边形的一种特殊分割：即用（1）中的那些线段来分割多边形。把这些三角形编号，使得除第一个外，每个三角形都与前面的三角形有一条公共的边。对第一个三角形，给出任意三个独立的数据，对后面的$n-3$个三角形中的每一个，都给出两个数据，它们彼此独立，也跟此三角形中同时属于前面那个三角形的边独立。

（4）给出n个顶点的直角坐标，一共$2n$个数据。这时我

们不仅决定了多边形，而且也决定了坐标系，但坐标系的位置并不是本质的，它依赖于三个参数，因此只有 $2n-3$ 个数据是本质的。

5.17 决定一个底，需要$2n-3$个数据（见习题5.16）。决定尖顶（与底相对的顶点），需要三个直角坐标，坐标系可选择如下：底在坐标平面上，原点是底的一个顶点，底的一条边与一条坐标轴重合。因此需要$2n$个数据。

5.18 与习题5.17相同，$2n$。

5.19 将多项式写成形式

$$f_0 x_v^n + f_1 x_v^{n-1} + \cdots + f_{n-1} x_v$$

其中f是$v-1$个变量的j阶多项式。利用习题3.34的结果和数学归纳法可以证明所需要的数据数目（展开式中x_1，x_2，…，x_v的各次幂的系数数目）为：

$$\binom{n+v}{v} = \binom{0+v-1}{v-1} + \binom{1+v-1}{v-1} + \cdots + \binom{n+v-1}{v-1}$$

5.8，5.9，5.10，5.11，5.12，5.13，5.14，5.15为评注，不存在解的问题。

第 六 章

6.1 （1）9，形状$r(x)=0$

（2）9，形状$r(x)=0$

（3）36，形状$r(x, y)=0$

（4）7，形状$r(x, y, z, w)=0$

其中那些可以明显消去的也都计算在内了！

共有61个分款。

6.2 把x看作有n个分量x_1，x_2，…，x_n。

6.3 令$x_1=y_1$，$x_4=y_3$，把y_2看作包含两个元x_2和x_3，把分款r_2和r_3的组合（并列）看作一个分款；这样就可以得出（用适当记号）“递推”组：

$$s_1(y_1)=0$$

$$s_2(y_1,\ y_2)=0$$

$$s_3(y_1,\ y_2,\ y_3)=0$$

6.4 把y_1看作具有三个元x_1，x_2，x_3，把y_2看作有三个元x_4，x_5，x_6，令$y_3=x_7$，把前三个分款r_1，r_2，r_3组合成s_1，再把接下来的三个分款r_4，r_5，r_6组合成s_2；这样就得到与习题6.3中相同的关系组。

6.5 与§6.4(2)中所规划的实质上相同。

6.6 是§6.4(1)中的关系组的特殊情形，见习题3.21。

6.7 是对于一条直线的双轨迹；参阅§6.2(5)。事实上，圆内所有定长的弦切于一个（容易作出的）与此圆同心的圆。

6.8 在a上作一点A，在b上作一点B，它们与a，b的交点的距离都是$\frac{l}{2}$：作一圆切a于A，切b于B，因为A有两种可能作法，B也是这样，所以这样的圆就有四个。在所得的这四个圆中有一个是所求三角形的旁切圆；所求直线x必定切于这四个圆弧中之一。这里我们见到的是对于直线x的双轨迹，参阅§6.2(5)和习题6.7。

6.9 HEARSAY（谣言）

6.11 (1)从幻方常数c出发，所有九个数x_{ik}的和应当是

$$1+2+\cdots+9=45$$

另一方面，三行的和是

$$3c$$

由$45=3c$导出$c=15$

（2）将三行与两条对角线相加，它们的和是$5c$。再将不含有中心元x_{22}的行与列（它们有4个，其和为$4c$）减去，即得

$$3x_{22}=5c-4c=15$$

故$x_{22}=5$。

（3）为了填出那些不包含中心元x_{22}的行与列，我们将15的所有不同的表示法（即将15表示为1，2，3，4，6，7，8，9中三个不同的数之和）列出，它们是

$$\begin{aligned}15&=1+6+8\\&=2+6+7\\&=2+4+9\\&=3+4+8\end{aligned}$$

（4）在上面15的四种表示式中，那些仅仅出现一次的数字，用黑体字印出，它们应当放在行或列的中间位置，其余出现两次的数字（用普通字体印出）在幻方的角上。

（5）从任一个用黑体字印出的字（比如1）出发，并令它$=x_{12}$。而在它的关于15的同一表示式里另外两个用普通字体印出的数字中（在我们的例子中是6和8），其中之一必$=x_{11}$。这样，第一次，你可以在四种可能中选一种，第二次可以在两种可能中选一种，以后就再没有选择的余地了。在利用（3）中列出的15的四种表示式时，你实际上只要选出一种就行了。比如说，你得到了幻方

6	1	8
7	5	3
2	9	4

而你能得到的$4\times2=8$个幻方，在某种意义上说，都是"合同"的，即可以从它们中任一个出发，通过旋转和反射来得到其余的。

写出来的这个幻方可以验证习题6.1的解中出现的数61。

6.12 (1)假若所求数的千位数的数字$\geqslant 2$，则这个数乘9以后就要增加位数。因此所求的数的形状是$1abc$。

(2) 此外，$1abc\times9=9\cdots$，因此这个数必定具有形状$1ab9$。

(3) 于是

$$(10^3+10^2a+10b+9)9=9\cdot10^3+10^2b+10a+1$$

$$89a+8=b$$

因此，$a=0$，$b=8$；即得所求数是$1089=33^2$。

6.13 (1)因为 $ab\times bc$ 生成一个三位数，$a\cdot b<10$。设$a<b$；则仅有十种可能情形：

$$a=1,\ 2\leqslant b\leqslant 9;\ a=2,\ ,\ b=3\text{或}4。$$

(2) $(10a+b)(10b+a)=100c+10d+c$

$$10(a^2+b^2-d)=101(c-ab)$$

因此，a^2+b^2-d可被101整除，但

$$-9<a^2+b^2-d\leqslant 82$$

故知$a^2+b^2-d=0$。

（3）$a^2+b^2=d\leqslant 9$，因此$b<3$，于是推知$a=1$，$b=2$；从而得$c=2$，$d=5$。

6.14 让我们试着找一找这样一对诡秘的三角形。

（1）在这相等的五部分中，不可能包括三条边：否则两个三角形就全等，所有六个部分也就相等了。

（2）因此两个三角形有两边与三角相等。由于它们有相同的角，它们是相似的。

（3）令a,b,c是第一个三角形的三边，b,c,d是第二个三角形的三条边，假若它们是这两个相似三角形的对应边，则可得

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

这就是说，边组成了一个几何数列。而几何数列是容易作的，例如令

$$a,\ b,\ c,\ d$$

分别等于

$$8,\ 12,\ 18,\ 27$$

注意$8+12>18$，两个边分别为8，12，18和12，18，27的三角形，因为它们的边成比例，所以是相似的，于是它们的三个角也必相等。

6.15 (a)求三个整数x，y和z，使得

$$x+y+z=9,\ 1<x<y<z$$

这只能有三种解（9元钱的不同分法只有三种）：

$$9=1+2+6$$

$$=1+3+5$$

$$=2+3+4$$

(*b*) 把这三行排成一个方块使得每一列的和数也是9。

实质上（除行列的不同排列外）只可能有一种这样的排列（我们把它表成简单的对称形式）：

6	2	1
2	4	3
1	3	5

(*c*) 现在把条件中的"次款"拿出来检验。因为6是方块中的最大数，因此第一行是属于艾尔的而第一列是买冰琪琳的。在方块中，某一行中的一数，它等于该行与第一列相交位置那个数的两倍，是唯一的，就是4。因此第二行是属于彼尔的，而第二列是买三明治的。因而克里斯买汽水的钱数是最后一行与最后一列相交处的数，5元。

6.76 (*a*)夫人买了x件礼品，每件花x美分，丈夫买了y件礼品，每件花y美分。由条件，有

$$x^2-y^2=75$$

$75=3\times5\times5$　仅有六个因数

$$(x-y)(x+y)=1\times75=3\times25=5\times15$$

因此仅有下述三种情况：

$$\begin{matrix} x-y=1 \\ x+y=75 \end{matrix} \quad 或 \quad \begin{matrix} x-y=3 \\ x+y=25 \end{matrix} \quad 或 \quad \begin{matrix} x-y=5 \\ x+y=15 \end{matrix}$$

由此可列出下表：

夫人	丈夫
38	37
14	11
10	5

(b) 现在把留下的条件"次款"拿出来检验，就可明确地得出

安妮	38	37	彼尔·布朗
	14	11	乔·约尼斯
贝蒂	10	5	

因此玛丽的丈夫一定是乔·约尼斯。

6.17 显然，不同情况的数目从一开始就是有限制的。($4!=24$)。然而假如你聪明一点的话，就无需去检验所有这些情形。

(a) 令

$$b \qquad g \qquad w \qquad s$$

分别表示

布朗　　格林　　怀特　　史密斯

的夫人所喝的瓶数。于是

$$b+g+w+s=14$$

$$b+2g+3w+4s=30$$

由此得

$$g+2w+3s=16$$

(b) 从最后的方程可看出，g 和 s 或同为奇数，或同为偶数。因此，只要检验四种情形就行了：

g	s	$w=8-\frac{g+3s}{2}$
3	5	−1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

只有最后的情形是合适的。于是得

$$s=2,\ w=3,\ g=4,\ b=5$$

因此，安妮的丈夫是史密斯，贝蒂的丈夫是怀特，凯洛的丈夫是格林，桃乐西的丈夫是布朗。

6.18 把条件划分为分款在解智力问题时常常是有用的。读者在搜集数学智力问题时可以找到适当的例子，比如在H.E.Dudency著《数学游戏》（多佛）上即可见到。《Otto Dunkel 纪念问题集》，[《美国数学月刊》，64卷(1957)的一个增刊]，包含一些合适的材料：61页上的$E776$就是这类问题的一个特别简洁的例子。

6.20 (b) § 6.2(4)，$l=5$。(c) 习题3.6，$n=4$。(d) § 6.4(1)，$n=4$。(l) § 2.5(3)，§ 6.4(2)。

6.22 方程组关于三个未知量x，y和z是对称的；换言之，这三个未知量起的作用完全相同。这就是说，x，y和z之间的一个置换，可以使方程式的次序改变，但整个方程组不变。因此，假如未知量是唯一确定的，就必须有$x=y=z$，在这样的假定下，立即可得$6x=30$，$x=y=z=5$。

剩下需证明未知量是唯一确定的；这只须用解线性方程组的一些常见步骤即可证明。

6.23
$$\begin{aligned} y+z&=a\\ x\quad+z&=b\\ x+y\quad&=c\end{aligned}$$

x，y，和z的任何置换仍保持方程组左端不变。令$x+y+z=s$（它在x，y和z的置换之下仍是不变的），把三个方程相加，易得

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

于是方程组化为下列三个方程，（每一方程仅含一个未知量）

$$s-x=a,\ s-y=b,\ s-z=c$$

整个方程组（不仅仅是左端）关于数偶$(x,\ a)$，$(y,\ b)$，$(z,\ c)$来说是对称的。

6.24 （斯坦福大学1958）

令

$$x+y+u+v=s$$

其余与习题6.23同。

6.10，6.19，6.21，6.25是评注，不存在解的问题。

附　　录

给教师及教师的教师的提示

希望在教学中用本书的教师不要忽略本书开头写给所有读者的提示，此外，他们还必须注意下面谈到的几点：

1. 在序言中我们已经提到了，本书将给未来的中学教师（同样也给在职的教师）提供一个进行适当的创造性工作的机会。我想这样一种机会是必需的：因为一个教师，倘使自己并没有一点创造性工作的经验，那末他就甚至不能够去发现学生的创造性的活动，更不用说去启发、引导、帮助他们这方面的积极性了。

当然，不能指望一个普通的教师去研究某些很高深的问题。但是，一个不落俗套的数学问题的求解，也是真正的创造性工作。本书中列举的习题（没有标上*号的），尽管并不要求中学以外的知识，但是却要求读者具有较高程度的钻劲和独立见解。这类问题的求解，在我看来，就是一种创造性工作，它们应当列入到培训中学数学教师的课程里去。事实上，未来的教师们在这类问题的求解过程中，就有机会去通晓完整的中学数学知识——不是靠死记硬背，而是在解决有趣的问题中得到真正的知识。而且更重要的是，他可以从中提高自己的能力，学到驾驭中学数学的本领和解题的洞察力。所有这些使得他能够更有效地去指导和鉴定他的学生的工作。

2. 本卷仅是全书的上半部分。在本卷里并没有明显地

涉及讲授方法，这方面的内容我们将在下一卷的专门一章里加以讨论。

然而本卷却包含了许多习题材料，它们可以拿到一些（特别是比较先进的）中学课程里去应用。我向老师们建议作这样一种有用的实习，即考虑把你们正在做的一些题，拿到可能的课堂教学中去。

这种实习最好是当一道题的解法已经找到并且经过了充分的消化以后再进行。这时你可以回顾一下这道题并且自问："我可以在哪里用上这道题？它用到了哪些以前的知识？为了讲好这道题需要先准备哪些其它的问题？我怎样去讲这道题？我怎样对这些人或这个班去讲这道题——或者我怎样给吉米·宗斯讲这道题？"所有这些问题都是很好的，当然还有其它一些好的问题——但是最好的还是从你自己脑子里发出来的问题。

3．虽然这一卷还不是一个完整的教程，但是它若作为一个解题讲习班的课本，所包含的材料已是足够了。

我曾经在不少培训教师的学院里指导过这样的讲习班，有不少有意于搞这类讲习班的同事们向我索取过这方面的材料。据我了解还有一些学院最近也在筹办这样的讲习班或类似的班。可以想见，会有更多的学院要试办这样的讲习班。正是鉴于这一情况，我才决定在第二卷未完稿之前先出版第一卷，尽管这样做要冒些风险。

4．经过了一些试验以后，我为我的讲习班制订了一个工作程序，在这里介绍一下是有好处的[1]。

1)这里的某些话引自文献〔19〕。

先是在由指导教师主持的课堂讨论中去解一些典型的问题（我们将用它来提出有用的模型），本书头四章的课文可以说是尽可能用文字逼真地把这种课堂讨论复现出来。然后引导学生去认出问题所涉及的模型，并明确地把它提出来。上述各章的课文同样也显示了这一步是怎样去做的。

学生的家庭作业就是作题（如本书在每章后面所列出的题目），这些习题给了学生一个去应用、澄清和推广在课堂上得到的模型（同时也包括某些方法和技巧）的机会。

5. 我利用讲习班让学员们自己在班上讲解习题并找出解答（这是讲习班的一个基本特点），实际上，这也就是给了他们一个教学实习的机会，而在大多数常见的课程里，却并没有这样充分的机会。

当家庭作业交上来后，对于习题中的有些方面（譬如一个独特的解法或一个麻烦的题目），就在讲习班的学员中找一个作得特别好的（或特别不好的），让他到课堂的黑板上去讲。到了后来，当全班对于这套做法已经熟悉了以后，就可以让学员暂时充当一下指导教师的角色去主持课堂讨论。但是最好的教学实习还是通过小组活动来进行的。这个活动分三个步骤：

首先，在一个实习课开始时，每个学员都分到一个不同的题（每人仅一个），这个题他应当在这一实习课里解出。他不可以与周围的人商量，但他有了问题可以去询问指导教师。

然后，在本堂或下一堂实习课里，每一名学员必须把他的解答核对、整理并检查清楚。如果可能的话，最好把解法加以简化，同时再看看有没有求得这个结果的其它方法。他

应当想尽办法把他这道题弄熟，并且作好要把他的题目和解法向全班作讲解的准备。所有这些，他都可以去征求指导教师的意见。

最后，在再下一堂实习课里，学员们就组成讨论小组：每四人组成一个组（可以有一个缺额的组），这些组是由学员们自行组成的，指导教师不必干预。在一个组里，先由一个人充当教师的角色，其余人充当学生。“教师”就给“学生”们讲他的问题，就象平时指导教师在课堂讨论中所作的那样，努力去激发“学生”们的主动性并引导他们去得到解答。当“教师”讲完之后，接着全组就对这一讲解作一个简短而友善的评论，然后再由别的组员充当教师并讲述他的问题。这个步骤重复下去一直到每一个成员都轮到为止。以后学员们可以进行部分的重新组合（相邻的两个组可以互派一名“教师”到对方去），于是每一名学员就可以有不止一次机会去改进、推敲他的讲解。一些特别有趣的问题或特别好的讲解，就拿到全班去讲并讨论。一些志趣投合的组还可以自行组合去进行一些对组员们来讲都认为是新的问题的讨论。当然，这些都是应受到鼓励的。

这些由讨论组里解出来的问题很快就在班里普及了。我感到讲习班整个来讲是成功的。许多学员已是有经验的教师，他们中不少人感到参加讲习班为他们指导自己的班提供了有用的借鉴。

6. 本卷对于那些指导解题讲习班的学院的指导教师们（特别是当他首次进行指导时）是有裨益的。他可以按着上面(4.和5.)讲的步骤去实施。在课堂讨论里，他可以选用前四章里任一部分的内容。印在章末的习题适合于留作家庭作

业：把卷末给出的解答大意扩充成为一个完善的叙述是需要经过一番认真努力的（不过指导教师不应随心所欲地去点题，他在指定一个题之前，应当很好考察一下这个题和它的解法，以及与它有关的题）。对于平时的考试和期末的考试，指导教师最好就不要再选用印在本卷上的题目，这时他可以去参阅有关的课本（又如习题1.50，2.78，3.92）。对于小组活动（见5.）则题目可以出得难一些，也不一定要求与本章内容紧密相连，有些题可以从本章选也可以选自后来的章节。

第五章和第六章可以用来讨论，也可以指定作为阅读内容。这两章的作用，将在下一卷中得到更好的说明。

当然，在取得一些经验以后，指导教师可以更多地只采用本书的精神，而不必拘泥于墨守细微末节。

参 考 文 献

Ⅰ经典部分

[1] Euclid, Elements.

[2] Pappus Alexandrinus, Collectio, F. Hultsch编, 1877年, v.2, pp.634—637.

[3] R.Descartes, Œuvres, Charles Adam与Paul Tannery编。

[4] G.W.Leibnitz, (1)Mathematische Schriften, C.J.Gerhardt编。

(2)Philosophische Schriften, C.J.Gerhardt编。

(3)Opuscules et fragments inédits, Louis Couturat整理。

[5] Bernard Bolzano, Wissenschaftslehre, 第二版, 1930, v.3, pp.293—575。

Ⅱ.近代部分

[6] E.Mach, Erkenntnis und Irrtum, 第四版, 莱比锡, 1924; pp.251—274及其它地方。

[7] J.Hadamard, Leçons de Géométrie plane, 巴黎, 1898; 附录A, 关于几何上的方法（有中译本）。

[8] F.Krauss, Denkform mathematischer Beweisführung, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, v.63(1931), pp.209—222。

[9] Werner Hartkopf, Die Strukturformen der Probleme, 博士论文, 柏林, 1958。

Ⅱ.作者的有关工作

书

[10] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis，与G.Szegö合著，英译本Problems and Theorems in Analysis，v.1，1972，v.2，1976，柏林。

[11] How to Solve It，第二版，1957（缩写HSI）。

[12] Mathematics and Plausible Reasoning，普林斯顿，1954。两卷本，Induction and Analogy in Mathematics（v.Ⅰ）和Patterns of Plausible Inference（v.Ⅱ）（缩写MPR）。

文章

[13] Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. Schweizerische Pädagogische Zeitschrift，1919，11qq.

[14] Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben？Acta Psychologica，4，1938，pp.113—170。

[15] Die Mathematik als Schule des Plausiblen Schliessens. Gymnasium Helveticum，10，1956，pp.4—8。重印于Archimedes，8，1956，pp.111—114.英译文Mathematics as a subject for learning plausible reasoning. The Mathematics Teacher，52，1959，pp.7—9。

[16] On picture—writing. American Mathematical Monthly，63，1956，pp，689—697。

[17] L'Heuristique est-elle un sujet d'étuce raisonnable？La Méthode dans les Sciences Modernes（"Travail et Méthode"，numéro hors série）1958，pp.279—

285。

[18] On the curriculum for prospective high school teachers. American Mathematical Monthly,65,1958, pp.101—104。

[19] Ten Commandments for Teachers.Journal of Education of the Faculty and College of Education, Vancouver and Victoria, nr.3, 1959, pp.61—69。

[20] Heuristic reasoning in the theory of numbers. American Mathematical Monthly, 66, 1959, pp.375—384。

[21] Teaching of Mathematics in Switzerland. American Mathematical Monthly, 67, 1960, pp. 907—914; The Mathematics Teacher, 53, 1960, pp.552—558。

[22] The minimum fraction of the popular vote that can elect the President of the United States. The Mathematics Teacher, 54, 1961, pp.130—133。

Ⅳ.习题

[23] 本书部分习题取自斯坦福大学数学竞赛试题 (Stanford University Competitive Examina tion in Mathematics.)[它们在解答部分已明确指出，例如2.45(斯坦福大学1959)]。该试题（某些带解答）多数发表在 The California Mathematics Council Bulletin。

[24] The Olympiad Problem Book.Д.О. Шкляр-скuй, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом 俄文原著,I.Sussman 英译。

责任编辑：王文亮
封面设计：刘嵩柏

统一书号：7089·115
每　册：0.94元